Modelacion de Sistemas Utilizando Cadenas de Markov

Jorge Luis Romeu, Ph.D.
Emeritus, State University of New York
Dpt. MAE, Syracuse University
ASQ Reliability Division
Past Director, Region II (NY & PA)
Email: Romeu@cortland.edu
https://web.cortland.edu/romeu/

Febrero 11, 2025

Resumen

La **modelacion de un sistema o proceso como Cadena de Markov** ofrece una excelente herramienta para la evaluacion de su rendimiento y para el estudio de posibles factores que los afecten positiva o negativamente. En esta charla presentaremos cuatro ejemplos del modelaje del Covid-19, utilizando Cadenas de Markov: (1) siguiendo la trayectoria de pacientes infectados con Covid-19 desde una unidad de cuidados intensivos (UCI), hasta su muerte; (2) asumiendo que el virus infecte gran parte de la poblacion, impidiendo asi su mayor difusion, se llega a la "inmulizacion de la manada"; (3) estudio de la apertura de las universidades durante la epidemia de Covid-19, donde la Cadena de Markov se mueve en un espacio de nueve estados transitorios, hasta llegar a uno de dos estados absorbentes: expulsion de la universidad o graduacion; (4) evaluacion de cuatro modelos de vacunacion y comparación de sus efectos para obtener la "inmunidad de la manada".

Ventajas

La modelacion estocastica permite:

- Establecer dirección/tasas de las *transiciones*
- Evaluar medidas de rendimiento del sistema para determinadas tasas de transición
- Encontrar las tasas de transición apropiadas para obtener el rendimiento deseado
- Combinar distintas tasas y ver los resultados

Modificacion de los Ejemplos del Covid

- Substituya contexto con un ejemplo industrial
- Diagramas de Estados y Tasas son iguales
- Calculos y resultados numericos, tambien
- Interpretaciones: en un contexto industrial
- Los demas resultados tambien son iguales
- Nuevos Ejemplos Industriales:
  - Generadora de Electricidad y Avion Bimotor

Primer Ejemplo:

- **Un modelo de Cadenas de Markov para el estudio de la difusion del Covid-19**
-
- https://www.researchgate.net/publication/343021113_A_Markov_Chain_Model_for_Covid-19_Survival_Analysis

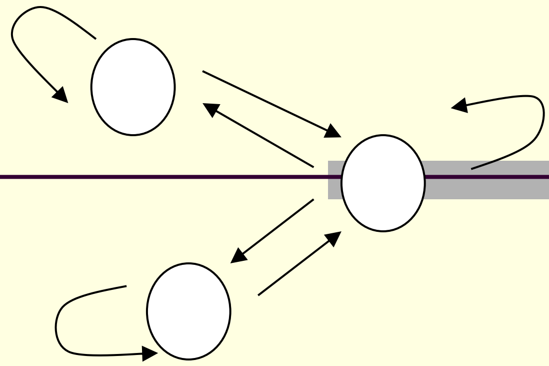
Un modelo de Cadenas de Markov para el estudio de la difusion del Covid-19

Este articulo ilustra el poder de las Cadenas de Markov para el estudio de un sistema. El trabajo modela la trayectoria de los pacientes infectados por Covid-19, desde su arribo a una unidad de cuidados intensivos (ICU) hasta su muerte. Las probabilidades de utilizacion de los estados estacionarios se han obtenido para dos sistemas: uno eficiente y otro ineficiente, ilustrando la comparacion de la eficacia de dos sistemas. Luego, incluimos mas estados absorventes, para modelar situaciones mas complejas. Utilizanto la matriz TPM (Transition Probability Matrix) obtenemos: (1) la probabilidad de muerte de un paciente, y sus estancias en los diferentes estados transientes; y (2) los valores esperados del tiempo transcurrido hasta su fallecimiento. Estos resultados ayudan a establecer (1) los requisitos de logistica para estas unidades ICU, y (2) bases para los procedimientos de “triage” de sus pacientes. Este tutorial ha sido, basado en el numero de ‘hits’ en LinkedIn y ResearchGate, el mas leido de todos nuestros trabajos sobre modelacion de Covid-19.

Primera Version: *Sistema Reparable*

- Considere un *Sistema Reparable*
  - *Ejemplo: Un avion bi-motor*
- Asuma *tres estados Recurrentes* del sistema:
  - Operacion Correcta/Completa (Up/Full)
    - Volando con ambos motores
  - Operacion Defectuosa (Degraded)
    - Un motor ha fallado, y vuela con el segundo
  - Falla del Sistema (Down/Failed)
    - El avion aterriza, y va al taller
- Solo un evento ocurre, por unidad de tiempo.

Markov Chain State Space Diagram Over a Simple Three-element state space: (0) Operating, (1) Degraded and (2) Failed.



Transition Probability Matrix P for Three State *Markov Chain*

$$P = \begin{array}{cccc} States & 0 & 1 & 2 \\ 0 & p_{00} & p_{01} & p_{02} \\ 1 & p_{10} & p_{11} & p_{12} \\ 2 & p_{20} & p_{21} & p_{22} \end{array} = \begin{array}{cccc} States & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1-q_{01} & q_{01} & 0 \\ 1 & p_{10} & 1-p_{10}-q_{12} & q_{12} \\ 2 & 0 & p_{21} & 1-p_{21} \end{array}$$

$$\Pi = Limit_{T\to\infty}(\Pr ob\{X(T)=0\}, \Pr ob\{X(T)=1\}, \Pr ob\{X(T)=2\}) = (\Pi_1;\Pi_2;\Pi_3)$$

Comparacion de medidas de rendimiento de dos sistemas:

Case (Rates)	Long-run	Operating	Degraded	Failed System
Efficient (5%)	Probabilities	0.545	0.273	0.182
Efficient (5%)	Times Between	1.834	3.667	5.50
Inefficient (10%)	Probabilities	0.387	0.322	0.290
Inefficient (10%)	Times Between	2.583	3.099	3.444

Efficient system: *transition probability* (Degraded) is 0.05 and that of remaining Failed (State 2) is 0.7.
Ineficient system: *transition probability* (Degraded) is 0.1 and that of remaining Failed (State 2) is 0.8.

For Efficient System: $T_0 = 1/\pi_0 = 1/0.545 = 1.834$; $T_1 = 1/\pi_1 = 3.667$; $T_2 = 1/\pi_2 = 5.50$;

Segunda Version A: *One Shot Device*

- Asuma operamos un hospital general
  - Utilizando una fuente de poder en-linea
- Si dicha fuente (generador) falla, entonces
  - Se conectan dos generadores (Off-Line)
  - Dichos generadores proveen el servicio normal
- Si uno de estos dos generadores falla
  - El servicio es ahora “degradado”
- Si ambos Generadores Fallan (o no encienden):
  - Un pequeno Generador entra en accion
  - Y el servicio es entonces minimo
- Si el generador de emergencia también falla
  - El sistema falla totalmente.

Segunda Version B: *One Shot Device*

- Asuma de nuevo un Avion Bimotor:
- (1) Operando con los dos motores
- Si un motor falla, entonces
- (2) Vuela con un solo motor y
- Comienza la reparación del defectuoso
- Si el segundo motor falla
- (3) Comienza a “planear” y trata de reparar
- Si no es posible repararlo a tiempo
  - (4) El sistema falla totalmente

.

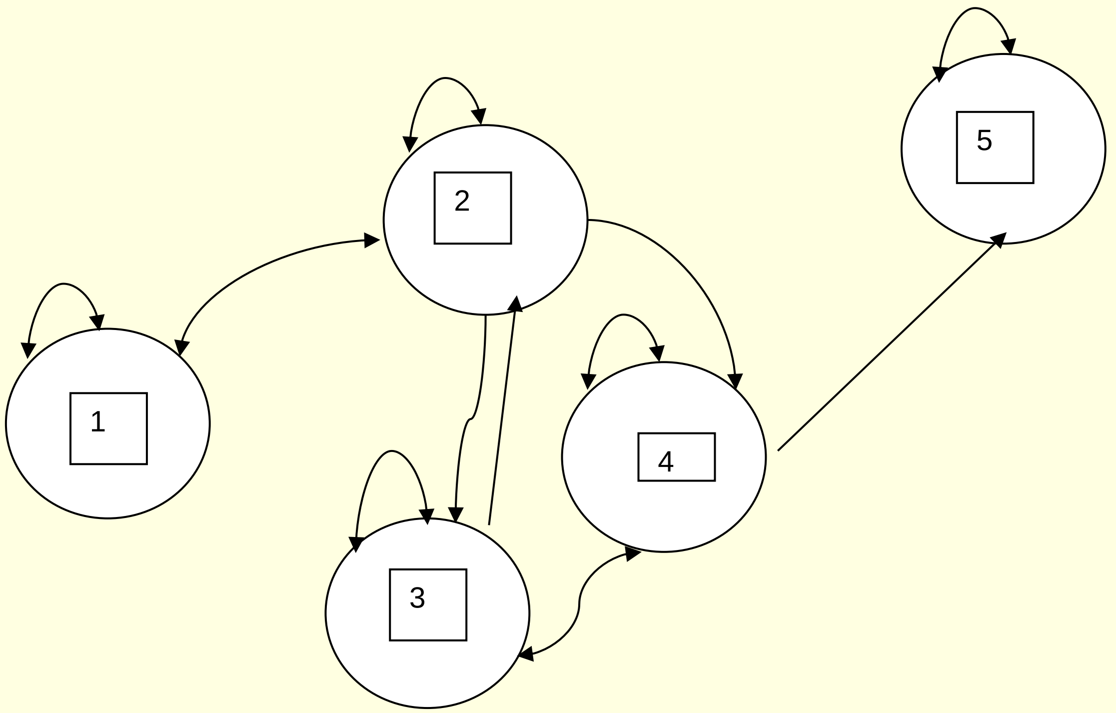
TPM of Markov Chain over five states

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	
0.93	0.07	0.00	0.00	0.00	(1); System working On-Line
0.05	0.80	0.10	0.05	0.00	(2): Off-Line, Fully operational (2)
0.00	0.15	0.80	0.05	0.00	(3): Off-Line, Degraded (1 Unit)
0.00	0.00	0.05	0.80	0.15	(4): Emergency Unit only
0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	(5): Failed System (absorbing state)

Matrix inverse $(I-Q)^{-1}$ of the Transient States:
Sojourns in Trans. States, Before Absortion.

(1)	(2)	(3)	(4)
26.1905	16.6667	10.0000	6.66667
11.9048	16.6667	10.0000	6.66667
9.5238	13.3333	13.3333	6.66667
2.3810	3.3333	3.3333	6.66667

Markov Chain State Space Diagram



Tiempo promedio de falla, desde cada estado transitorio

Starting State for the System	**Average Time to System Failure**
From Initial System Time (On-Line)	= 26.19 + 16.66 + 10.00 + 6.66 = 59.52 days
From Off-Line Time (Two Units)	= 16.67 +10 + 6.67 = 33.34 days
From Off-Line Time (One Unit)	= 10.00 + 6.66 = 16.66 days
From the Time of connecting the Emergency Unit only	= 6.66 days
Average Time, System On-Line	= 26.19 days

Probabilidad de Falla del Sistema desde los estados transitorios (P^n)

Starting	State	Two Days	Four Days	Eight Days	Sixteen Days
Initial	**On-Line Generator**	0.000	0.002	0.018	0.098
From	**Off-Line (Two Units)**	0.007	0.036	0.118	0.282
From	**Off-Line (One Unit)**	0.007	0.038	0.127	0.307
From	**Emergency Unit only**	0.270	0.444	0.636	0.780

Confiabilidad(t) = Rel(t) = 1 – Prob{Fallar desde St}

Prob. que el Sistema alguna vez llegue a un estado, desde cualquier otro

	On-Line	**Off-Line (Two U.)**	**Off-Line (One Unit)**	**Emergency**	**Failed System**
On-Line	0.96	1.0	0.75	1.0	1.0
Off-Line (2 Units)	0.45	0.94	0.75	1.0	1.0
Off-Line (1 Unit)	0.36	0.8	0.92	1.0	1.0
Emergency Unit only	0.09	0.2	0.25	0.85	1.0
Failed	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0

Segundo Ejemplo:

A Two-Absorbing-States Markov Chain to study the problem of Covid-19 Herd Immunization

https://www.researchgate.net/publication/343345908_A_Markov_Model_to_Study_Covid-19_Herd_Immunization

Este segundo modelo de Markov asume que el virus infecta una gran parte de la población, lo que impide un mayor contagio, produciendo asi la "inmunización de la manada". El modelo de Markov anterior, asumia que no existian ni una vacuna, ni un tratamiento, para el Covid-19. Tambien asumia, que si las tasas de infección carecian de control, toda la población eventualmente perecería. El presente modelo asume que los sobrevivientes de Covid-19 son ahora inmunes, y no pueden volver a infectarse.

A Two-Absorbing-States Markov Chain to study the problem of Covid-19 Herd Immunization

https://www.researchgate.net/publication/343345908_A_Markov_Model_to_Study_Covid-19_Herd_Immunization

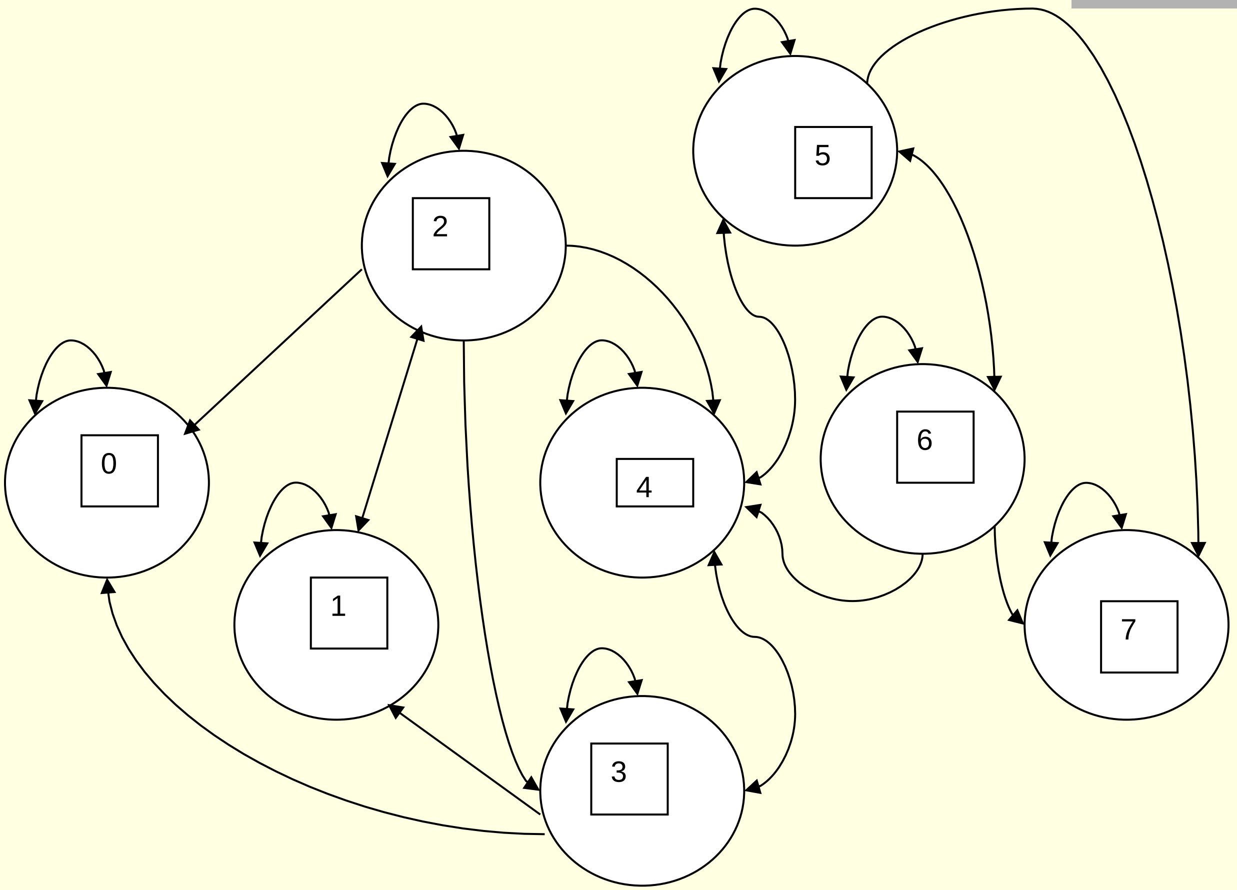
El presente modelo asume que los sobrevivientes de Covid-19 son ahora inmunes, y no pueden volver a infectarse. Existe mucho debate sobre la utilización de la *inmunidad de la manada* como alternativa para el combate de la epidemia del Covid-19. Esta cadena de Markov compara cuantitativamente esta situación. El modelo obtiene (1) las dos probabilidades: de que un paciente muera, o se inmunice. Tambien obtiene (2) el tiempo esperado hasta la muerte (o hasta la inmunización), partiendo de diferentes estados del Espacio, informacion que puede ser utilizada para los triages. Las tasas de transición pueden ser utilizadas para comparar estrategias, y determinar cuales son mas eficientes, asi como para ayudar a establecer tasas de infección aceptables. El tiempo esperado de visitas (sojourn) a cada estado del sistema, ayuda a estimar el tamaño requerido por cada departamento del sistema de salud, para poder tratar a los respectivos pacientes. El modelo ayuda: (1) a responder muchas preguntas que el sistema de salud se propone, y (2) a comparar el nivel de eficacia de las diferentes estrategias de salud publica, de una manera mas objetiva.

Markov Chain for Herd Immunization

Over an *eight-element State Space*:

(0) Covid-19 Immunized population (absorbing state);
(1) *Non-Infected* persons in the General Population;
(2) *Infected persons*
(but asymptomatic; i.e. not known to be such);
(3) *Infected persons Detected and Isolated*;
(after symptoms, or Covid-19 tests positive)
(4) *Hospitalized patients*
(after becoming ill with Colvid-19);
(5) *Patients in the ICU* (very sick);
(6) Patients in a Ventilator (critical);
(7) Patient *Death* (absorbing state);

Markov Chain *State Space Diagram*



Markov Chain Transition Probability Matrix

State	Immune	UnInfected	Infected	Isolated	Hospital	ICU	Ventilator	Dead
0	1.0	0.00	0.00	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
1	0.0	0.96	0.04	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2	0.2	0.05	0.40	0.2	0.2	0.0	0.0	0.0
3	0.2	0.05	0.00	0.6	0.2	0.0	0.0	0.0
4	0.0	0.00	0.00	0.1	0.8	0.1	0.0	0.0
5	0.0	0.00	0.00	0.0	0.3	0.3	0.3	0.1
6	0.0	0.00	0.00	0.0	0.1	0.3	0.3	0.3
7	0.0	0.00	0.00	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0

<u>Diferentes Matrices Utilizadas en los Calculos</u>:

- Matriz de Probabilidades de Transiciones: P
- Sub-Matriz Prob. de Estados Transitorios: Q
- Matriz de Sojourns en Estados Transitorios: S
- Matriz del Potencial de Visitas a los Estados: R
- Matriz de Probabilidades de Visitar un Estado: F
- Sub-Matriz de Probabilidades Bajo la Identidad: B
- Matriz de la Probabilidad de Absorción: G=SB

P = [Q B]; Q= Sub-Mat. In-Trans. States; S = (I – Q) $^{-1}$;

[0 I] B= Sub-Mat. Trans. to Recurrent States (I)

R = [Inf 0]; (Potential Mat.); F= [I 0] Mat. Ever Reaching Probs.

[Inf S] (w/Tot. Visits) [G H]

G = SB ; H = R Sub Mat. with: F(j,j) = 1- 1/R(j,j) & F(i,j) = R(I,j)/R(j,j)

Tiempo promedio de muerte, desde distintos estados transitorios

Starting State for anyone Individual	**Average Time to Die**
From Time of Initial Infection (undetected)	=1.667+2.22+5.556+ 0.972+0.417=10.83 days
From the Time of Infection/Isolation	=3.889+5.556+0.972+0.4167 =10.83 days
From the Time of Hospitalization	=11.11+1.94+0.83 = 13.9 days
From the Time of entering an ICU	=2.91667 + 1.25000 = 4.17 days
From the Time of entering a Ventilator	2.08 days

Probabilidad de Morir o Volverse Inmune, Proviniendo de un Estado Transiente (G)

Starting State	Probability of Dying	Probability Immunization
Uninfected	0.222222	0.777778
Infected/undetected	0.222222	0.777778
Infected/Isolated	0.222222	0.777778
Hospitalized	0.444444	0.555556
In ICU	0.666667	0.333333
On Ventilator	0.777778	0.222222

Rel(t) = 1 – Prob(Morir, Desde el Estado St}

Los dos modelos que siguen, incluidos aquí para ilustración adicional, pueden ser analizados siguiendo las mismas líneas de los dos primeros, ya descriptos, como ejercicios individuales.

A Markov Chain to study the problem of Re-opening Colleges under Covid-19

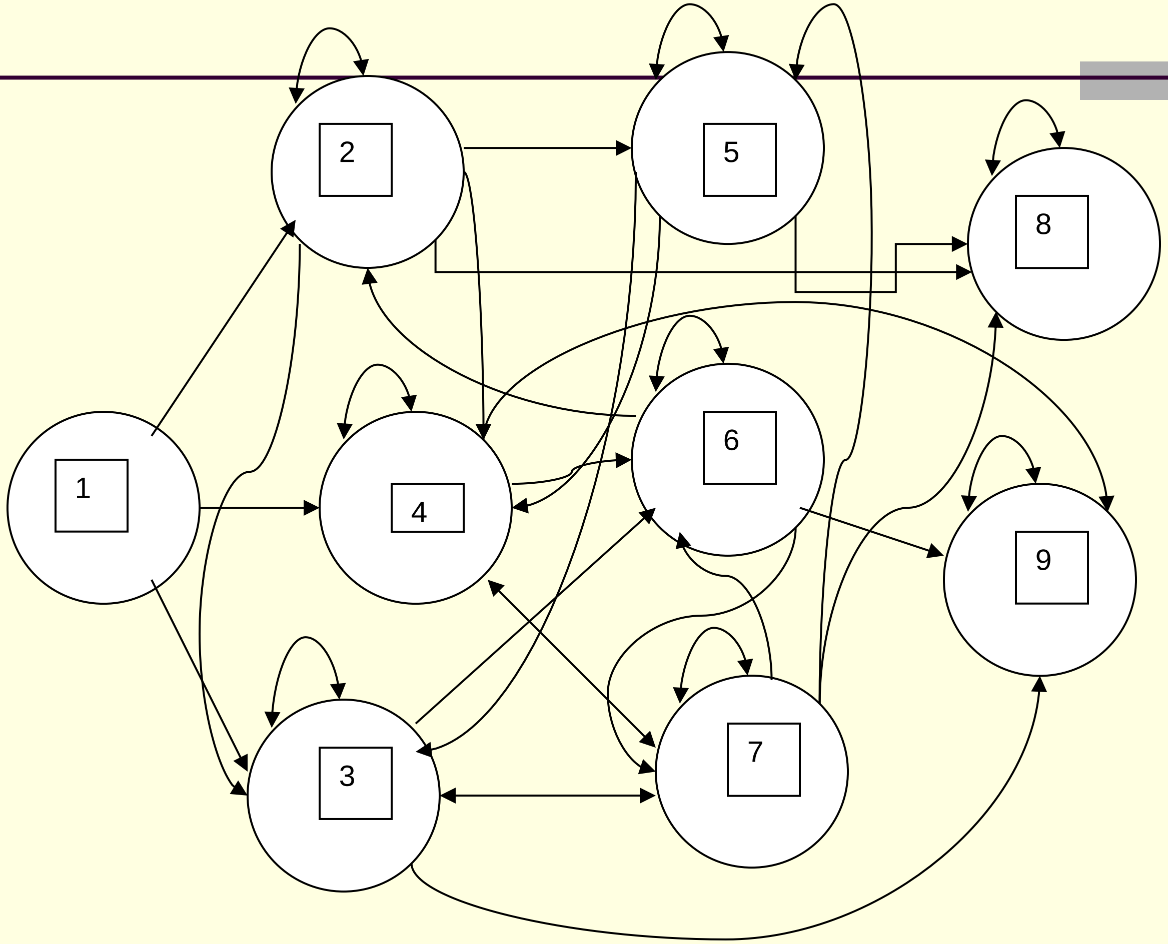
https://www.researchgate.net/publication/343825461_A_Markov_Model_to_Study_College_Re-opening_Under_Covid-19

This Markov Model studies the dilemma of Re-opening Colleges under Covid-19. We analyze the situation using a Markov Chain defined over a nine element state space that moves through aset of Transient states, eventually leading to two Absorbing States: Expulsion or Coursework Completion. The model, due to its specific State Spaces and transition probabilities is very usefulto compare reopening plans. Through the infection (transition) rates we study their impact on the probabilities of Expulsion and Course Completion. Differing infection rates depend on student compliance with community public health measures such as face covering, social distancing, etc.By assigning different values to these rates, their impact can be assessed and compared. Once updated and fine tuned (or rebuilt) Markov models can be used by college authorities to re-assessand improve their reopening plans, by faculty and students, to assess their risks in such openings, and by governments, to assess the validity and safety of such plans, thus allowing or proscribing them.

Markov Chain for College Reopening **over a *nine-element State Space***

(1) *Arrival to Campus* and *Covid- 19 testing*;
(2) *Infected students* go *into Isolation* units;
(3) Some students are placed in *Presential* courses;
(4) Other students are placed in *Distance Learning* courses;
(5) Some *students who violated Code* are *placed in Suspension*;
(6) Some *students* become *infected* with Covid-19,
but are *not detected* as such;
(7) Some *students violate* code but are *not detected*;
(8) *Absorption*: Some students are Expelled from College
(9) *Absorption*: Other students Complete their Semester

Markov Chain *State Space Diagram*



Markov Chain Transition Probability Matrix

St.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9.**
1	0	0.05	0.35	0.6	0.00	0.00	0.00	0.00	0.0
2	0	0.70	0.20	0.0	0.05	0.00	0.00	0.05	0.0
3	0	0.00	0.80	0.0	0.00	0.05	0.05	0.00	0.1
4	0	0.00	0.00	0.8	0.00	0.05	0.05	0.00	0.1
5	0	0.00	0.10	0.1	0.70	0.00	0.00	0.10	0.0
6	0	0.50	0.00	0.0	0.00	0.30	0.00	0.00	0.2
7	0	0.00	0.00	0.0	0.70	0.10	0.00	0.20	0.0
8	0	0.00	0.00	0.0	0.00	0.00	0.00	1.00	0.0
9	0	0.00	0.00	0.0	0.00	0.00	0.00	0.00	1.0

Probability of Expulsion or Completion, Starting from a Transient State

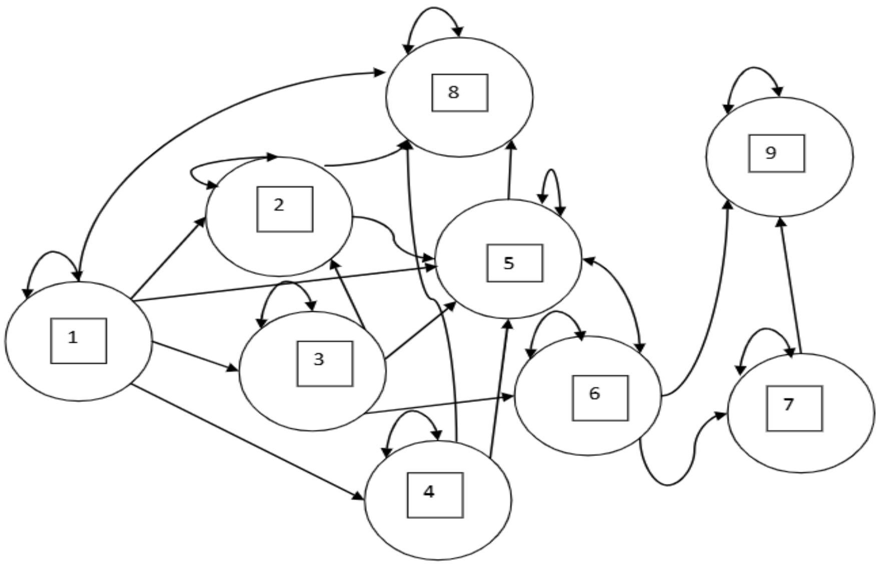
Starting State	Probability of Expulsion	Probability of Completion
Arrival	0.216839	0.783161
Infected	0.384030	0.615970
Presential	0.208039	0.791961
Distance Learning	0.208039	0.791961
Suspension	0.472026	0.527974
Infected but undetected	0.274307	0.725693

A Markov Model to Assess Covid-19 Vaccine Herd Immunization Patterns

https://www.researchgate.net/publication/347441411_A_Markov_Model_to_Assess_Covid-19_Vacine_Herd_Inmunization_Patterns

The Markov model assesses different patterns of vaccination, which may affect achieving (ornot) Herd Immunity. The urgency of this paper stems from polls suggesting a significant number of people are not willing to become vaccinated. Herd Immunity can be acquired by (a) letting thevirus infect most of the population. Weaker ones (the elderly, those with co-morbidities etc.) willdie) and those surviving will become immunized; alternatively, (b) by vaccinating a large part ofthe general population. Vaccination carries two aspects: one individual and the other social. First, the vaccine protects the individual. Secondly, if enough individuals in the general population are vaccinated, the activity has an effect over the Pandemic. With few new customers to infect, the virus starves and disappears. By changing the vaccination parameters (e.g. infection rates, participation and immunization percentages), model results will differ, allowing the comparison of different public health strategies.

Figure 1: The *State Space Diagram* for the Markov Chain



RATIONALIZATION

The Markov Chain *unit time* is *a week*. *Transitions* refer to the State changes that occur from *one Monday to the following Monday*. State (1): the *General population*. Asymptomatically infected individuals, unaware of their condition, pass the virus on to others and then become immunized. State (2): *Mild Covid-19*; detected persons are quarantined at home. State (3): *Non Vaccinated* persons (refused vaccination). Some may spread the virus in the community. Some may develop symptoms, are tested, and are quarantined at home. If they become very ill, they are sent to the hospital. State (4): *Vaccinated*; some individuals may suffer mild Covid-19, stay at home, and eventually 70% become immunized. Some others may get sick and require medical attention. State (5): *infected* and requiring *medical attention at home*. State (6): persons with *serious illness* which require *hospitalization and treatment*. Some recover and are sent home; others get worse, and are placed in ICUs. State (7): *patients in ICU*. Some improve and are sent back to the ward, and others are placed on Ventilators or die. State (8): *herd immunization*; and *State (9): death*. These two latter states are *Absorbing: once you enter them, you cannot leave.*

Markov Chain Transition Probability Matrix (for acceptable vaccination levels; e.g. 70%)

Pop	MildInf	NonVac	Vaccine	SevereCov	Hospital	ICU	Immune	Dead.
0.05	**0.05**	**0.23**	**0.54**	**0.03**	**0.00**	**0.00**	**0.10**	**0.00**
0.00	0.70	0.00	0.00	0.05	0.00	0.00	0.25	0.00
0.00	0.10	0.70	0.00	0.10	0.10	0.00	0.00	0.00
0.00	0.20	0.00	0.07	0.03	0.00	0.00	0.70	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.30	0.20	0.00	0.50	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.20	0.57	0.20	0.00	0.03
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.20	0.65	0.00	0.15
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00

Probabilities of Immunizations and Deaths

State	Inmunizat	Deaths
1.	0.941738	0.058262
2.	0.978690	0.021310
3.	0.801105	0.198895
4.	0.991293	0.008707
5.	0.872139	0.127861
6.	0.552486	0.447514
7.	0.315706	0.684294

States:

Populat.(1); MildInfect.(2); Non-Vacc.(3); Vacc.(4); SevereCovid(5); Hospitalized(6); InICU(7);

Rel(t) = 1 – Prob(Morir, Desde el Estado St}

Conclusiones

- Los Modelos de Cadenas de Markov pueden mejorarse mediante la modificacion del Espacio (el numero de estados), de las tasas de transicion, o de sus direcciones.
- Estos modelos pueden ser utilizados para evaluar, comparar y mejorar los rendimientos de los proyectos de ingeniería, asi como para evaluar los riesgos de diferentes proyectos.
- Alternativamente, pueden ser utilizados como ilustración.
- La modificación de las tasas de transición de la Cadena de Markov sirve para estudiar como estas pueden afectar las probabilidades de absorción por los estados estacionarios, y de esa forma, comparar la eficiencia de diferentes soluciones.