



CONTROL ESTADÍSTICO DE PROCESOS

1. APUNTES DE CLASE

Profesor: Arturo Ruiz-Falcó Rojas

Madrid, Marzo 2006



INDICE DE CONTENIDOS

1.	INTRODUCCIÓN AL CONTROL ESTADÍSTICO DE PROCESOS.....	4
2.	¿POR QUÉ VARÍAN LOS PROCESOS?.....	5
3.	FUNDAMENTOS ESTADÍSTICOS.....	7
4.	CAUSAS COMUNES Y CAUSAS ASIGNABLES O ESPECIALES	9
5.	¿QUÉ CONDICIONES HACEN FALTA PARA QUE SE PUEDA APLICAR EL GRÁFICO DE CONTROL?	10
6.	CAPACIDAD DE PROCESO.....	13
6.1.	CONCEPTO DE CAPACIDAD DE PROCESO.....	13
6.2.	ÍNDICES C_p Y C_{pk}	13
6.3.	VARIABILIDAD A CORTO Y LARGO PLAZO	16
6.4.	POTENCIALIDAD DEL PROCESO. ÍNDICES P_p Y P_{pk}	17
6.5.	CONCEPTO DE GRUPO HOMOGÉNEO RACIONAL	18
7.	GRÁFICOS DE CONTROL POR VARIABLES: GRÁFICOS DE SHEWHART	18
8.	CURVAS DE OPERACIÓN DEL GRÁFICO DE CONTROL	32
8.1.	CURVA DE OPERACIÓN DEL GRÁFICO DE MEDIAS.....	32
8.2.	CURVA DE OPERACIÓN DEL GRÁFICO DE DISPERSIÓN.	34
9.	INTERPRETACIÓN DE LAS INDICACIONES DEL GRÁFICO DE CONTROL.....	36
10.	ESTUDIO DE CAPACIDAD DE PROCESOS	39
10.1.	¿QUÉ ES UN ESTUDIO DE CAPACIDAD DE PROCESO?	39
10.2.	¿CÓMO SE REALIZA UN ESTUDIO DE CAPACIDAD DE PROCESO?	39
10.2.1.	Comprender los fenómenos físicos y tecnológicos importantes para el proceso	40
10.2.2.	Definición de la estratificación de las medidas a tomar	40
10.2.3.	Estabilizar del proceso.....	41
10.2.4.	Toma de los datos	41
10.2.5.	Identificación del patrón de variabilidad	41
10.2.6.	Comprobación de la normalidad de los datos	42
10.2.7.	Análisis e interpretación de los datos.....	43
10.2.8.	Construcción de un intervalo de confianza de los índices	46
11.	CASO DE PROCESOS NO NORMALES.....	47
11.1.	¿ES LA NORMALIDAD LO “NORMAL?”	47
11.2.	CONSECUENCIAS QUE TIENE EN EL ANÁLISIS.....	48
11.3.	TÉCNICAS DE NORMALIZACIÓN DE LOS DATOS.	49
12.	GRÁFICOS DE CONTROL PARA APLICACIONES ESPECIALES.....	54
12.1.	GRÁFICOS PARA MUESTRAS UNITARIAS (I-MR)	54
12.2.	GRÁFICOS QUE PERMITEN CONTROLAR DOS TIPOS DE VARIABILIDAD SIMULTÁNEAMENTE (I-MR-R/S).....	56
13.	GRÁFICOS DE CONTROL PARA EL CASO DE SERIES CORTAS.	57

14. OTROS GRÁFICOS DE CONTROL POR VARIABLES.....	60
14.1. GRÁFICO CUSUM.....	60
14.2. GRÁFICO EWMA.....	63
15. GRÁFICOS DE CONTROL POR ATRIBUTOS	65
15.1. GRÁFICOS DE CONTROL BASADOS EN LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL	65
15.2. GRÁFICOS DE CONTROL BASADOS EN LA DISTRIBUCIÓN DE POISSON.....	69
16. IMPLANTACIÓN DEL SPC EN UNA EMPRESA.....	71
16.1. FASE 1: PREPARACIÓN Y SELECCIÓN DEL PROCESO PILOTO	71
16.2. FASE 2: IMPLANTACIÓN DEL GRÁFICO DE CONTROL PILOTO	72
16.3. FASE 3: ANÁLISIS DE LOS PRIMEROS RESULTADOS	73
16.4. FASE 4: EXTENSIÓN A OTROS PROCESOS.....	73

Objetivos de este tema

En este tema se pretende que alcances los siguientes objetivos:

- a) Entender el concepto de variabilidad natural de un proceso.
- b) Aprender a realizar estudios de capacidad de procesos.
- c) Aprender a aplicar los gráficos de control, conocer sus limitaciones y adaptarlos en situaciones especiales (series cortas, datos no normales, etc.)

1. INTRODUCCIÓN AL CONTROL ESTADÍSTICO DE PROCESOS

El "Control Estadístico de Procesos" nació a finales de los años 20 en los Bell Laboratories. Su creador fue W. A. Shewhart, quien en su libro "Economic Control of Quality of Manufactured Products" (1931) marcó la pauta que seguirían otros discípulos distinguidos (Joseph Juran, W.E. Deming, etc.). Sobre este libro han pasado más de 70 años y sigue sorprendiendo por su frescura y actualidad. Resulta admirable el ingenio con el que plantea la resolución de problemas numéricos pese a las evidentes limitaciones de los medios de cálculo disponibles en su época.

Lamentablemente, a Shewhart se le recuerda "solo por los gráficos de control" (X-R, etc.). Por si fuera poco, a menudo se emplean estos gráficos de modo incorrecto o se desconoce las limitaciones de los mismos. Normalmente, la utilización incorrecta de los gráficos de control dimana del desconocimiento de los fundamentos estadísticos que los sustentan. Por esta razón se ha considerado conveniente hacer hincapié en los fundamentos estadísticos (párrafos 3 y 5), el problema del sobre ajuste del proceso (ver párrafo 6) y las limitaciones que presentan para la detección de derivas en los procesos y aumentos en la variabilidad en los mismos (ver párrafo 8).

2. ¿POR QUÉ VARÍAN LOS PROCESOS?

Un proceso industrial está sometido a una serie de factores de carácter aleatorio que hacen **imposible fabricar dos productos exactamente iguales**. Dicho de otra manera, las características del producto fabricado no son uniformes y presentan una **variabilidad**. Esta variabilidad es claramente indeseable y **el objetivo ha de ser reducirla lo más posible o al menos mantenerla dentro de unos límites**. El *Control Estadístico de Procesos* es una herramienta útil para alcanzar este segundo objetivo. Dado que su aplicación es en el momento de la fabricación, puede decirse que esta herramienta contribuye a la **mejora de la calidad de la fabricación**. Permite también aumentar el conocimiento del proceso (puesto que se le está tomando “*el pulso*” de manera habitual) lo cual en algunos casos puede dar lugar a la mejora del mismo.

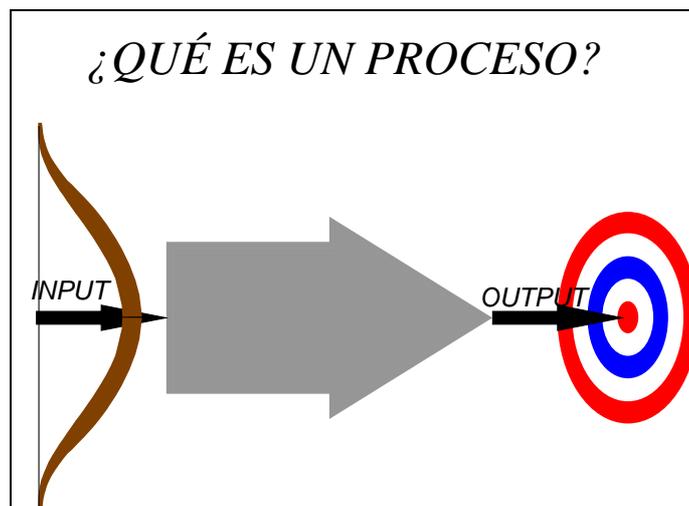


Figura 1



Figura 2

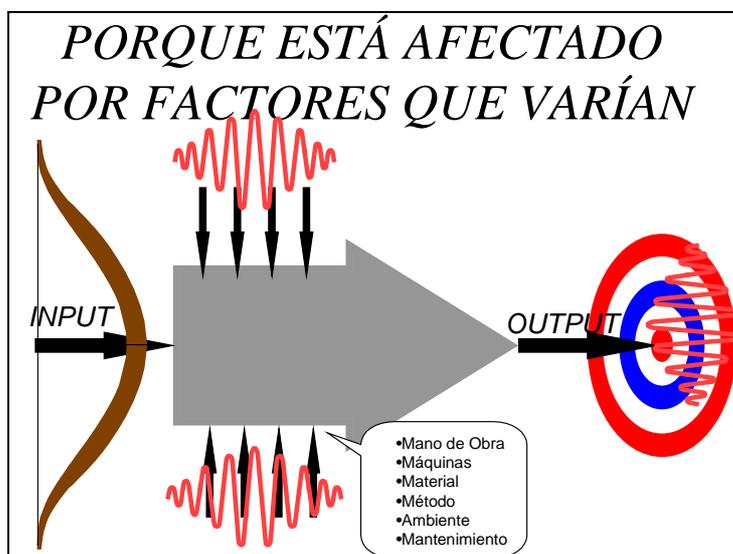


Figura 3

3. FUNDAMENTOS ESTADÍSTICOS.

Para el entendimiento del *Control Estadístico de Procesos* no es necesario ser un experto en estadística, pero es preciso recordar al menos los puntos que se describen a continuación.

a) Distribución Normal o Campana de Gauss.

La distribución normal es desde luego la función de densidad de probabilidad “estrella” en estadística. Depende de dos parámetros μ y σ , que son la media y la desviación típica respectivamente. Tiene una forma acampanada (de ahí su nombre) y es simétrica respecto a μ . Llevando múltiplos de σ a ambos lados de μ , nos encontramos con que el 68% de la población está contenido en un entorno $\pm 1\sigma$ alrededor de μ , el 95% de la población está contenido en un entorno $\pm 2\sigma$ alrededor de μ y que el 99,73% está comprendido en $\pm 3\sigma$ alrededor de μ .

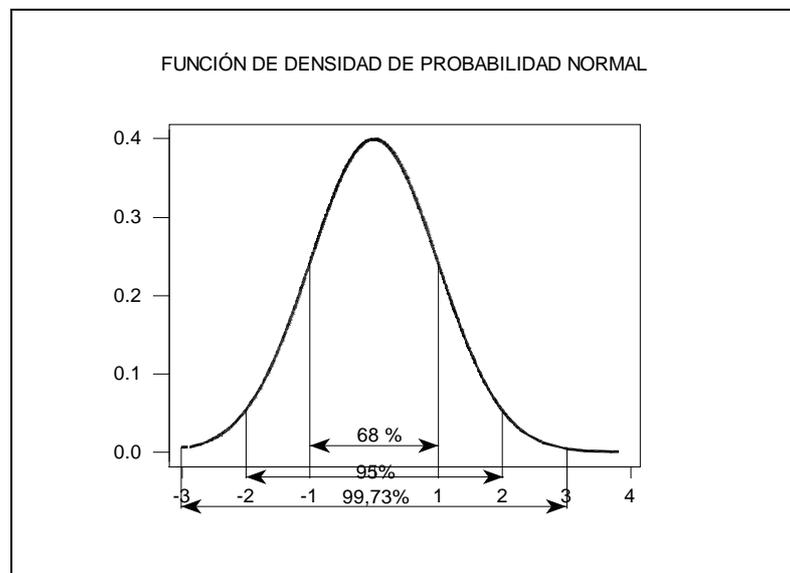


Figura 4 Función de densidad de probabilidad normal

b) Teorema del Límite Central.

El teorema del límite central (TLC) establece que **si una variable aleatoria (v. a.) se obtiene como una suma de muchas causas independientes, siendo cada una de ellas de poca importancia respecto al conjunto, entonces su distribución es asintóticamente normal.** Es decir:

Si

$X = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ donde las x_i son v.a de media μ_i y varianza σ_i^2

Entonces :
$$X \rightarrow N\left(\sum_{i=1}^n \mu_i, \sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}\right)$$

c) Distribución de las medias muestrales

Si X es una v.a. $N(\mu, \sigma)$ de la que se extraen muestras de tamaño n , entonces las medias muestrales se distribuyen según otra ley normal:

$$\bar{x}_m \in N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Obsérvese que como consecuencia del TLC, la distribución de las medias muestrales tiende a ser normal aún en el caso que la población base no lo sea, siempre que el tamaño de la muestra sea suficientemente grande $n \geq 25$, si bien este número depende de la asimetría de la distribución.

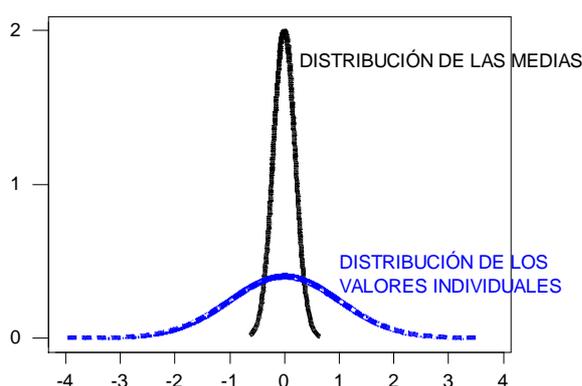


Figura 5: Función de densidad de las medias muestrales

4. CAUSAS COMUNES Y CAUSAS ASIGNABLES O ESPECIALES

De acuerdo con lo dicho en la introducción, el proceso está afectado por un gran número de factores sometidos a una variabilidad (por ejemplo oscilaciones de las características del material utilizado, variaciones de temperatura y humedad ambiental, variabilidad introducida por el operario, repetibilidad propia de la maquinaria utilizada, etc.), que inciden en él y que inducen una variabilidad de las características del producto fabricado. Si el proceso está operando de manera que existen pequeñas oscilaciones de todos estos factores, pero de modo que ninguno de ellos tienen un efecto preponderante frente a los demás, entonces en virtud del TLC es esperable que la característica de calidad del producto fabricado se distribuya de acuerdo con una ley normal. Al conjunto de esta multitud de factores se denominan **causas comunes**. Por el contrario, si circunstancialmente incide un factor con un efecto preponderante, entonces la distribución de la característica de calidad no tiene por qué seguir una ley normal y se dice que está presente una **causa especial o assignable**. Por ejemplo, si en un proceso industrial se está utilizando materias primas procedentes de un lote homogéneo y se continúa la fabricación con materias primas procedentes de otro lote, cuyas características son muy diferentes de las anteriores, es muy posible que las características de los productos fabricados sean significativamente distintas a partir de la utilización del nuevo lote.

Por definición, **se dice que un proceso está bajo control estadístico cuando no hay causas asignables presentes**. El Control Estadístico de Procesos se basa en analizar la información aportada por el proceso para detectar la presencia de causas asignables y habitualmente se realiza mediante una construcción gráfica denominada Gráfico de Control.

Si el proceso se encuentra bajo control estadístico es posible realizar una predicción del intervalo en el que se encontrarán las características de la pieza fabricada.

5. ¿QUÉ CONDICIONES HACEN FALTA PARA QUE SE PUEDA APLICAR EL GRÁFICO DE CONTROL?

Para que tenga sentido la aplicación de los gráficos de control, el proceso ha de tener una estabilidad suficiente que, aún siendo aleatorio, permita un cierto grado de predicción. En general, un proceso caótico no es previsible y no puede ser controlado. A estos procesos no se les puede aplicar el gráfico de control ni tiene sentido hablar de capacidad. Un proceso de este tipo debe ser estudiado mediante herramientas estadísticas avanzadas hasta que el grado de conocimiento empírico obtenido sobre el mismo permita conocer las causas de la estabilidad y se eliminen.

En lo sucesivo, se supondrá que los procesos tienen un cierto grado de estabilidad. Podemos distinguir dos casos:

- **El proceso está regido por una función de probabilidad cuyos parámetros permanecen constantes a lo largo del tiempo. Este sería el caso de un proceso normal de media constante y desviación típica constante. Este es el caso ideal y al que se pueden aplicar los gráficos de control para detectar la presencia de causas asignables.**
- **El proceso está regido por una función de probabilidad alguno de cuyos parámetros varía ligeramente a lo largo del tiempo. Este sería el caso de un proceso normal cuya media varía a lo largo del tiempo (por ejemplo, una herramienta de corte que va desgastando la cuchilla de corte). Estrictamente hablando, este desgaste de la herramienta sería una causa especial; sin embargo si puede conocerse la velocidad de desgaste, podría compensarse resultando un proceso análogo al caso anterior.**

Puede ocurrir que las características propias del proceso hagan que alguno de los factores de variabilidad intrínsecos al mismo, tenga un efecto preponderante, de modo que en este caso la distribución no sea normal. Un

ejemplo puede ser la distribución de los diámetros de un proceso de taladrado, cuyo valor inferior está limitado por el propio diámetro de la broca, mientras que la distribución presenta una cola hacia diámetros mayores debido a posibles incidencias oblicuas de la broca. En este caso, **se dice que el proceso está bajo control estadístico cuando no hay otras causas asignables presentes**. Esto es equivalente a decir que el proceso permanezca estable, es decir que los parámetros de la distribución permanezcan invariables y por lo tanto puede realizarse una predicción del intervalo en el que se encontrarán los valores de la característica de respuesta.

Por lo tanto, debe tratar de conocerse todo lo que sea posible de los fundamentos tecnológicos del proceso, ya que puede dar pistas sobre el tipo de distribución que seguirán los datos. En ningún caso debe “darse la normalidad por supuesta”. Debe comprobarse y en caso de que los datos no sean normales, deben aplicarse métodos especiales.

EJEMPLO- 1: ILUSTRACIÓN DE CAUSAS COMUNES EN UN PROCESO

Un proceso de fabricación consiste en “lanzar 10 monedas al aire”. Se supone que las monedas son perfectas de manera que en el lanzamiento de cada una se tiene un 50% de probabilidades de obtener cara, y un 50% de obtener cruz. La calidad de cada lanzamiento de 10 monedas se mide según el número de caras obtenidas. Podríamos asimilar lo anterior a un proceso industrial sometido a 10 causas de variabilidad no normales (binomiales en este caso). Al ser iguales, todas ellas tienen el mismo efecto sobre la variabilidad de la producción, por lo que las podremos considerar como causas comunes.

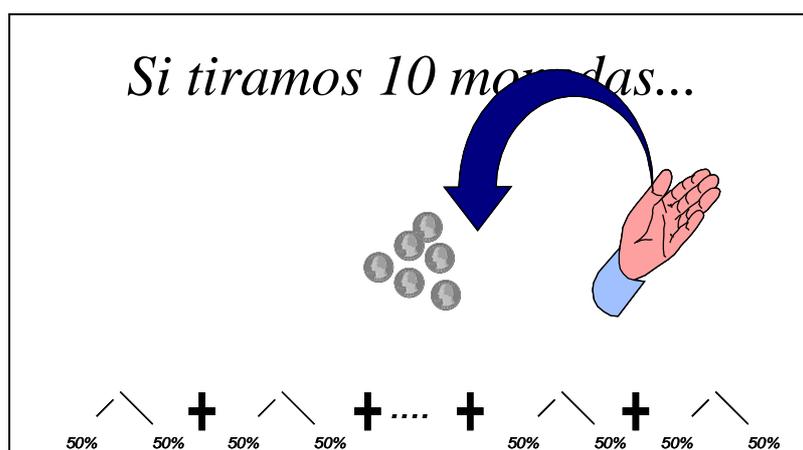


Figura 6: Simulación de un proceso sometido a causas comunes no normales

La teoría estadística nos enseña que la probabilidad de obtener exactamente x caras ($0 \leq x \leq 10$) se calcula por la distribución binomial:

$$P(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{(n-x)}$$

donde n es el número de monedas lanzadas (10 en este caso) y p la probabilidad de sacar cara con una moneda (0.5 en este caso). Si se representa gráficamente, se obtiene un función acampanada que recuerda a una gaussiana (ver Figura 7). Este hecho es una consecuencia del TLC. Si aumentara el número de monedas, la convergencia hacia la distribución normal sería aún mayor.

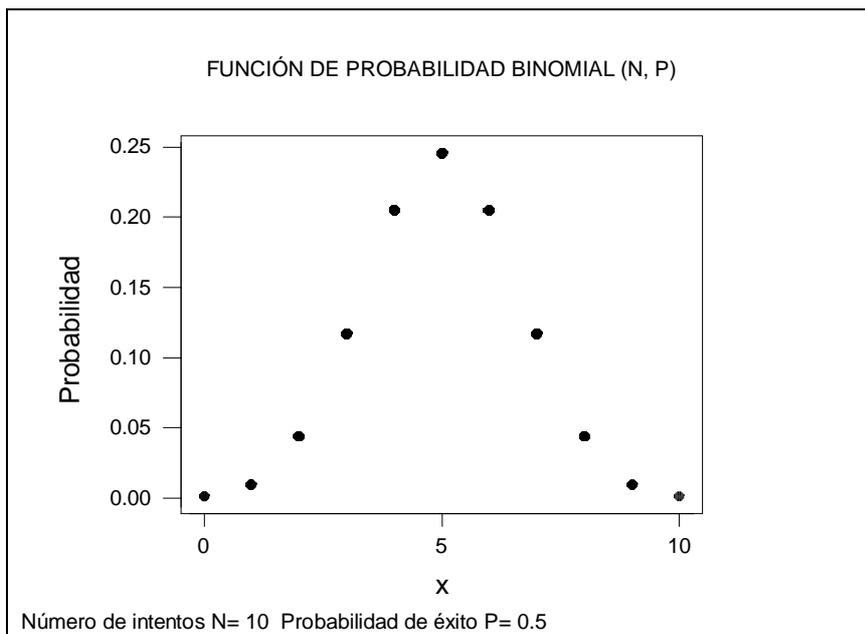


Figura 7: Función de probabilidad de la obtención de x caras lanzando 10 monedas

6. CAPACIDAD DE PROCESO

6.1. CONCEPTO DE CAPACIDAD DE PROCESO

Como consecuencia de todo lo anterior, si un proceso normal está en control estadístico, la característica de calidad del 99,73% de los elementos fabricados estará comprendida entre $\mu - 3\sigma$ y $\mu + 3\sigma$. El parámetro μ depende del punto en el que centremos el proceso. Sin embargo σ depende del número y variabilidad de las causas comunes del proceso y por lo tanto es intrínseca a él. Por lo tanto 6σ **es la Variabilidad Natural del Proceso o Capacidad del Proceso**. Por definición:

$$\text{CAPACIDAD DEL PROCESO} = 6\sigma$$

Es esencial resaltar que la variabilidad natural del proceso, 6σ , es intrínseca a él e independiente de las tolerancias que se asignen. Por lo tanto si 6σ es menor que el intervalo de las tolerancias a cumplir, necesariamente algunos productos fabricados estarán fuera de tolerancia y serán no conformes. Si no se tiene en cuenta este hecho y se pretende corregir a base de reajustar el proceso, es decir modificar el centrado, lo único que se consigue es aumentar la variabilidad del mismo.

6.2. ÍNDICES C_p Y C_{pk}

Con objeto de comparar la capacidad del proceso y la amplitud de las tolerancias a satisfacer, se define el **índice de capacidad de proceso**:

$$C_p = \frac{T_s - T_i}{6\sigma}$$

Si se pretende que la producción esté dentro de tolerancia, es necesario que $C_p > 1$.

Si el proceso no estuviese centrado, el valor de este índice falsearía el grado de cobertura con respecto a fabricar piezas fuera de tolerancias. En estos casos es más significativo el índice C_{pk} que se define:

$$C_{pk} = \min \left\{ \frac{T_s - \mu}{3\sigma}, \frac{\mu - T_i}{3\sigma} \right\}$$

De este modo se define un **proceso capaz** como aquel que $C_{pk} > 1$.
 Aplicando estos mismos conceptos a la variabilidad atribuible de una máquina de las que integran el proceso de fabricación, podemos definir la **capacidad de máquina**, el **índice de capacidad de máquina** C_M y C_{Mk} .

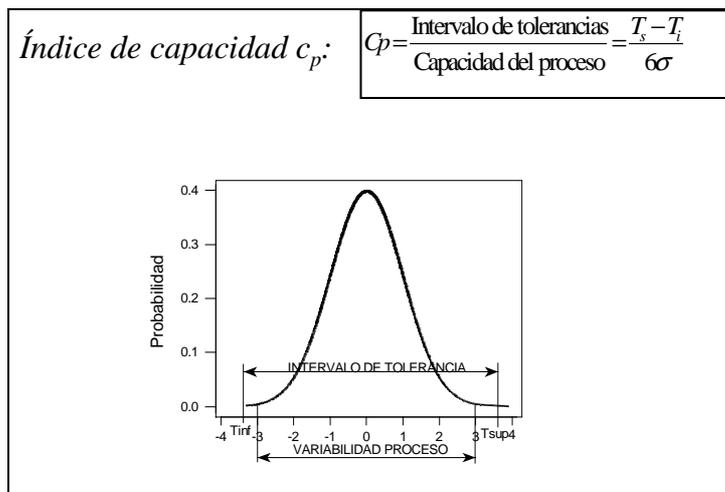


Figura 8: Índice Cp

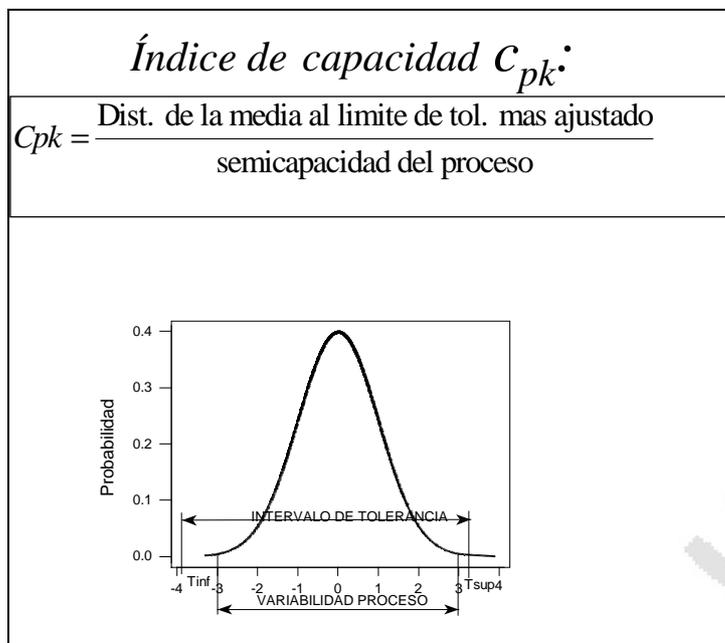


Figura 9: Índice Cpk

EJEMPLO- 2: LA MÉTRICA “6 SIGMA”

En 1.988 **Motorola** alcanzó el prestigioso **Malcom Baldrige National Quality Award**. Una de las bases fundamentales de su estrategia de calidad era el “**Programa 6 σ** ”. El objetivo de este programa fue reducir la variación de los procesos de manera que el intervalo de tolerancia fuera igual a 12 σ (6 a cada lado). De acuerdo con la definición del índice de capacidad de proceso:

$$c_p = \frac{12\sigma}{6\sigma} = 2$$

Suponiendo que se desplazase el proceso 1.5 σ , ver Figura 10, los coeficientes pasarían a ser:

$$c_p = \frac{12\sigma}{6\sigma} = 2 \quad c_{pk} = \frac{4,5\sigma}{3\sigma} = 1,5$$

Aún estas circunstancias, la cantidad de producto fuera de tolerancia sería tan solo de 3.4 ppm.

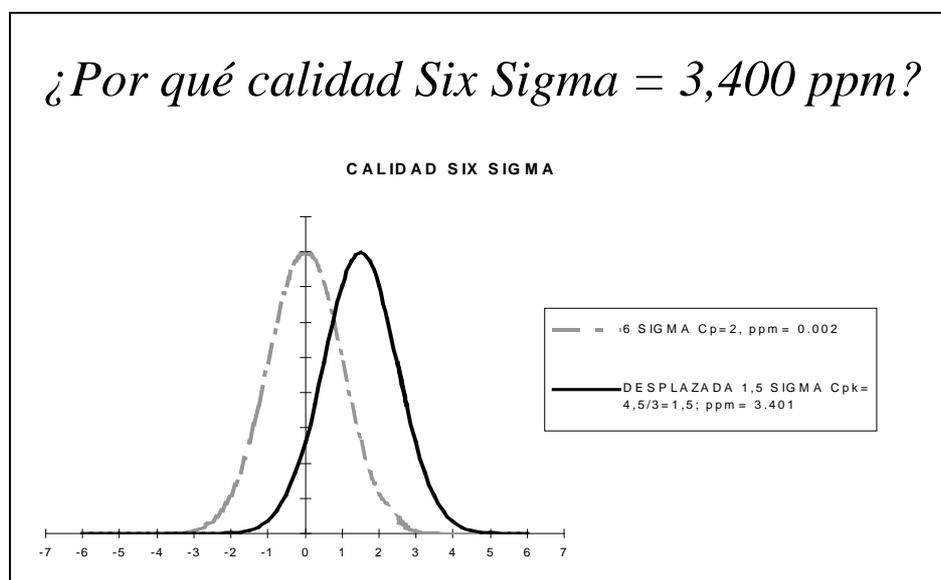


Figura 10

6.3. VARIABILIDAD A CORTO Y LARGO PLAZO

Un proceso productivo tiene habitualmente dos tipos de variabilidad:

- Variabilidad inherente del proceso. Aquella componente de la variabilidad debida a causas comunes solamente y representa la variabilidad que puede estar presente entre elementos fabricados en intervalos próximos (variabilidad en el corto plazo, ver Figura 11). Algunos autores denominan a este componente de la variabilidad como “ruido blanco”.
- Variabilidad total del proceso. Es la variación resultante de todas las causas de variabilidad (causas comunes y especiales), en la que se tienen en cuenta factores como el desgaste, cambios de lote de materia prima, etc. Representa la variabilidad que puede afectar al conjunto de los elementos fabricados recibidos por el cliente (variabilidad en el largo plazo, ver Figura 11). Algunos autores denominan a este componente de la variabilidad como “ruido negro”.

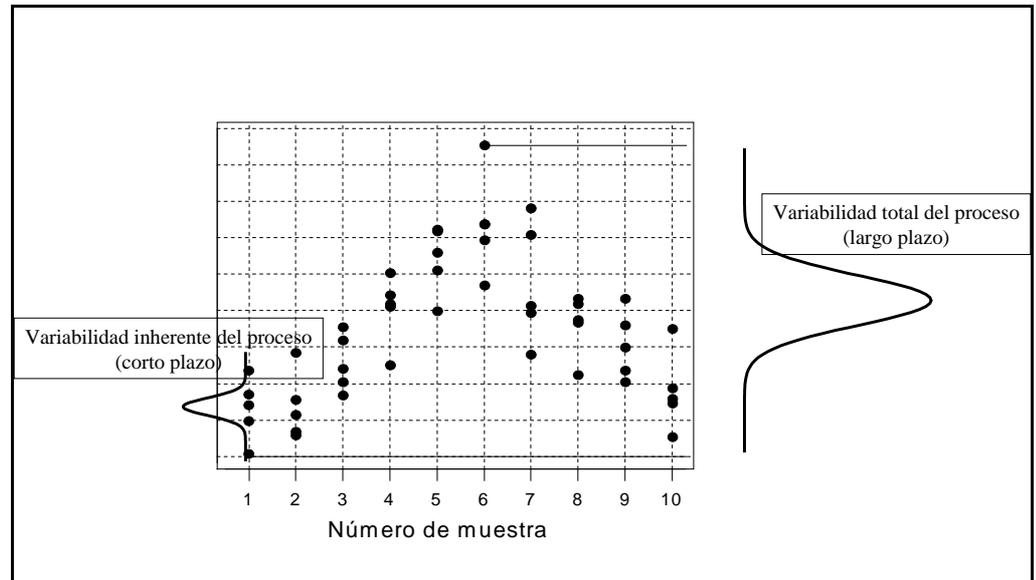


Figura 11 Descomposición de la variabilidad de un proceso

6.4. POTENCIALIDAD DEL PROCESO. ÍNDICES P_p Y P_{pk}

Durante mucho tiempo, ha existido la confusión sobre qué estimación de la variabilidad se debe utilizar para el cálculo de C_p , C_{pk} . Precisamente para poner un poco de orden en todo esto, se introdujeron los índices P_p , P_{pk} , de acuerdo con los siguientes criterios:

- C_p y C_{pk} se calculan con la variabilidad inherente del proceso (variabilidad en el corto plazo). En este caso se considera la variabilidad entre los elementos de la misma muestra o muestras próximas.
- P_p y P_{pk} se calculan con la variabilidad total del proceso (variabilidad en el largo plazo). En este caso se tiene en cuenta la variabilidad introducida por la deriva del centrado del proceso y la inestabilidad del mismo.

De manera general, se verifica que $C_p > P_p$ y $C_{pk} > P_{pk}$

Las ecuaciones de los índices quedan:

$$C_p = \frac{T_s - T_i}{6\hat{\sigma}_{CP}} \qquad C_{pk} = \min \left\{ \frac{T_s - \mu}{3\hat{\sigma}_{CP}}, \frac{\mu - T_i}{3\hat{\sigma}_{CP}} \right\}$$
$$P_p = \frac{T_s - T_i}{6\hat{\sigma}_{LP}} \qquad P_{pk} = \min \left\{ \frac{T_s - \mu}{3\hat{\sigma}_{LP}}, \frac{\mu - T_i}{3\hat{\sigma}_{LP}} \right\}$$

Los símbolos circunflejos “^” representan una estimación de la desviación típica considerada.

Es preciso resaltar que la utilización de los coeficientes P_p y P_{pk} no tiene todavía una aceptación unánime. Tiene una aceptación muy amplia en entornos de automoción (QS 9000 / TS 16949, etc.) pero no así en otras áreas.

6.5. CONCEPTO DE GRUPO HOMOGÉNEO RACIONAL

A la hora de planificar la toma de muestras para realizar un estudio de capacidad de proceso o la implantación de un gráfico de control, resulta muy importante tener en cuenta el concepto de **grupo homogéneo racional** (GHR). Veamos un ejemplo. Supongamos una máquina de inyección de piezas de plástico de 16 cabezales. En la definición del gráfico de control se establece una toma de muestra horaria de 16 unidades (un racimo de inyección). Obviamente el diferente tamaño de los cabezales es una fuente de variabilidad que muy probablemente puede hacerse presente. Por esta razón en la toma de muestras debe estudiarse no solo la variabilidad entre las inyecciones, sino también la variabilidad entre cabezales.

En el párrafo 10.2.2 se dan algunas indicaciones para la definición del GHR.

7. GRÁFICOS DE CONTROL POR VARIABLES: GRÁFICOS DE SHEWHART

Supongamos que un proceso se encuentra bajo control estadístico y por lo tanto su distribución es $N(\mu, \sigma)$. Si se extrae una muestra de tamaño n y su media muestral se encuentra comprendida fuera del intervalo comprendido entre $\mu - 3\sigma/\sqrt{n}$ y $\mu + 3\sigma/\sqrt{n}$ (llamados límites de control inferior y

superior respectivamente), podemos justificar este hecho de dos modos distintos:

- a) De acuerdo con el modelo teórico supuesto sabemos que el 0,27% de las muestras (es decir 27 muestras de cada 10.000) tendrán una media fuera de este intervalo y la muestra que hemos extraído es una de ellas.
- b) Es muy improbable obtener una muestra de estas características si realmente el modelo es el supuesto, de modo que parece más verosímil pensar que el proceso no está bajo control estadístico y por lo tanto la hipótesis de que se distribuye en ese momento según una $N(\mu, \sigma)$ es falsa.

Por el contrario, si la media muestral está comprendida dentro del intervalo anterior, no tendremos ninguna razón de peso para pensar que el proceso no se encuentra bajo control estadístico (el resultado es coherente con el modelo supuesto). Lo anterior no quiere decir que podamos estar absolutamente seguros de que el proceso se encuentre bajo control estadístico, sino que no tenemos la evidencia de que no lo está.

El *Control Estadístico de Procesos* se basa en repetir esta toma de muestras de manera periódica, calcular la media muestral y representar un gráfico de una manera similar a la Figura 12, de modo que si la media cae fuera de los límites de control existe la evidencia de que hay una causa asignable presente (proceso fuera de control). A este gráfico se le denomina *Gráfico de Medias* o simplemente *Gráfico \bar{X}* .

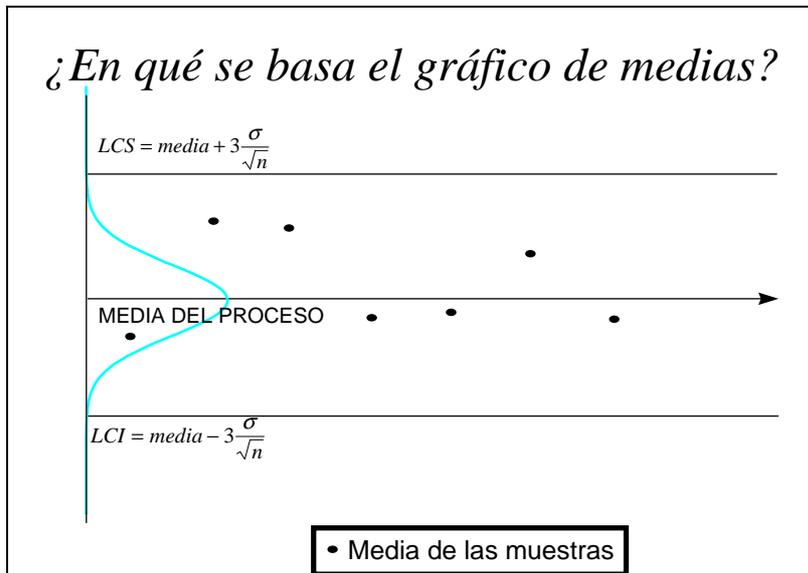


Figura 12: Fundamento del gráfico de medias

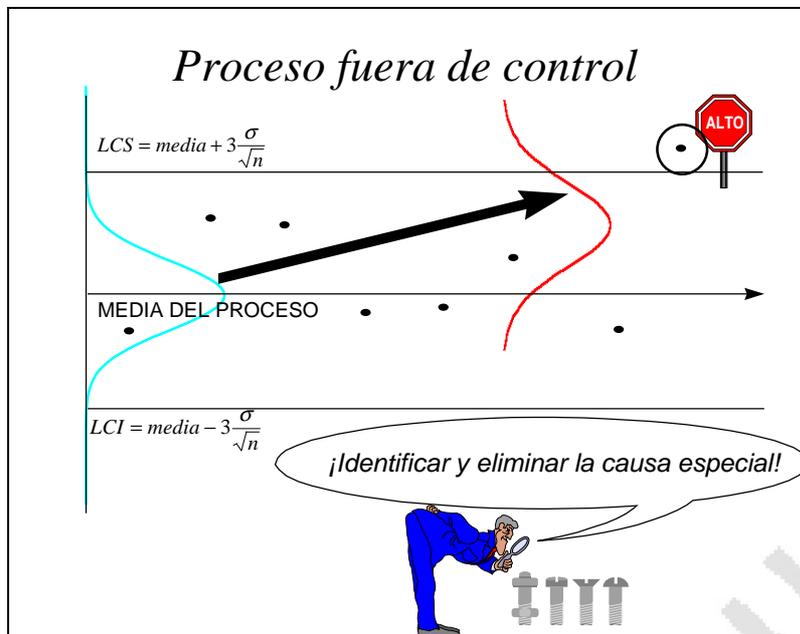


Figura 13: ¡¡Los gráficos de control no sirven para nada si no se investigan las causas asignables!!

El análisis de las muestras no se debe detener simplemente construyendo un *Gráfico de Medias* ya que aún pueden proporcionar más información del comportamiento del proceso. En efecto, la dispersión de los valores muestrales nos puede proporcionar una estimación de la dispersión del proceso y realizar un seguimiento de su evolución. Es sabido que la dispersión de los valores de una población se mide por su desviación típica σ y los estimadores muestrales utilizados más frecuentemente son el recorrido R (que en nuestro caso dará lugar al *Gráfico de Rangos o Recorridos o simplemente Gráfico R*) y la desviación típica muestral S (que dará lugar al *Gráfico de desviaciones típicas o simplemente Gráfico S*). Antes de seguir adelante es conveniente recordar algunas propiedades de estos estadísticos con objeto de alcanzar un mejor entendimiento de la construcción de estos gráficos.

a) Rango o recorrido muestral.

Se define como la diferencia entre el mayor valor presente en la muestra y el menor valor. Por su propia construcción, este estadístico da una estimación de la dispersión de la población de la que procede. Presenta la ventaja de que se calcula muy fácilmente y para valores muestrales pequeños $n \leq 8$ se comporta bien. Para valores mayores da una estimación sobrevalorada de la dispersión de la población. Existen tablas aplicables a procesos normales que, en función del tamaño de la muestra, proporcionan la función de distribución del estadístico $w = R/\sigma$, denominado "*recorrido relativo*" y también la $E(w) = d_2$ y $\sigma_w = d_3$.

b) Desviación típica muestral.

Es conveniente recordar que en los textos se utilizan dos estadísticos distintos. El primero de ellos se define:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

Para procesos normales, la esperanza matemática de la varianza muestral es:

$$E(s^2) = \frac{n-1}{n} \sigma^2$$

Por lo que es un estimador sesgado de la varianza poblacional σ^2 . Por esta razón algunas veces se toma como varianza muestral al estimador insesgado definido:

$$s^* = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

Este estimador de la varianza σ^2 es insesgado y además $n - 1$ son los grados de libertad de la muestra. Por estas razones, en ingeniería de calidad es más frecuente emplear s^* .

Las varianzas de ambos estadísticos son, para procesos normales:

$$\text{Var}(s^2) = \frac{2(n-1)}{n^2} \sigma^4 \quad \text{Var}(s^{*2}) = \frac{2}{n-1} \sigma^4$$

Puede comprobarse que el error cuadrático medio de s^2 es inferior al de s^{*2} . En *Control Estadístico de Procesos* es habitual operar con desviaciones típicas en lugar de con varianzas, por lo que es necesario conocer $E(s)$, $E(s^*)$, σ_s , σ_{s^*} .

$$E(s) = \sqrt{\frac{2}{n}} \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma[(n-1)/2]} \sigma = c_2 \sigma \quad E(s^*) = \sqrt{\frac{2}{n-1}} \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma[(n-1)/2]} \sigma = c_4 \sigma$$

En este caso ambos estadísticos son estimadores sesgados de σ .

$$\sigma_s = \sigma \sqrt{1 - c_2^2 - \frac{1}{n}} \quad \sigma_{s^*} = \sigma \sqrt{1 - c_4^2}$$

CONSTRUCCIÓN DEL GRÁFICO \bar{X} -R

i) Caso μ, σ conocidos.

Si μ y σ son conocidos entonces la construcción del gráfico de medias es inmediata a partir de su definición:

$$LCS = \mu + \frac{3}{\sqrt{n}}\sigma = \mu + A\sigma$$

$$LC = \mu$$

$$LCI = \mu - \frac{3}{\sqrt{n}}\sigma = \mu - A\sigma$$

El cálculo de los límites del gráfico de recorridos se hace de la manera siguiente:

$$LCS = (d_2 + 3d_3)\sigma = D_2\sigma$$

$$LC = d_2\sigma$$

$$LCS = (d_2 - 3d_3)\sigma = D_1\sigma$$

ii) Caso μ, σ desconocidos.

Si alguno de los dos fuera conocido sería un híbrido de los dos casos i) y ii). Puesto que en este caso no se tiene ningún conocimiento previo, es preciso estimar μ a partir de la media de las medias ($\bar{\bar{x}}$) y σ a partir del recorrido medio (\bar{R}) de k (por ejemplo $k=25$) muestras iniciales.

A partir de $\bar{\bar{x}}$ y \bar{R} se trazarían los límites provisionales de la manera siguiente. En el gráfico de medias:

$$LCS = \bar{\bar{X}} + 3 \frac{\bar{R}}{d_2} \frac{1}{\sqrt{n}} = \bar{\bar{X}} + A_2 \bar{R}$$

$$LC = \bar{\bar{X}}$$

$$LCI = \bar{\bar{X}} - 3 \frac{\bar{R}}{d_2} \frac{1}{\sqrt{n}} = \bar{\bar{X}} - A_2 \bar{R}$$

y los límites del gráfico de recorridos serían:

$$LSC = \left(1 + 3 \frac{d_3}{d_2}\right) \bar{R} = D_4 \bar{R}$$

$$LC = \bar{R}$$

$$LCI = \left(1 - 3 \frac{d_3}{d_2}\right) \bar{R} = D_3 \bar{R}$$

Una vez establecidos los límites de control provisionales para ambos gráficos, se comprobaría si alguna de las muestras está fuera de los límites. En caso afirmativo se procedería a buscar la causa asignable que pudiera explicar esa anomalía y se recalcularía los límites. Estos límites deben recalcularse periódicamente, por ejemplo cada 25 muestras.

CONSTRUCCIÓN DEL GRÁFICO \bar{X} -S

i) Caso μ, σ conocidos.

Si μ y σ son conocidos la construcción del gráfico de medias es análoga al caso anterior.

$$LCS = \mu + \frac{3}{\sqrt{n}} \sigma = \mu + A\sigma$$

$$LC = \mu$$

$$LCI = \mu - \frac{3}{\sqrt{n}} \sigma = \mu - A\sigma$$

Cuando se utiliza s, el gráfico S se construye:

$$LSC = \left(c_2 + 3\sqrt{1 - c_2^2 - \frac{1}{n}} \right) \sigma = B_2 \sigma$$

$$LC = c_2 \sigma$$

$$LIC = \left(c_2 - 3\sqrt{1 - c_2^2 - \frac{1}{n}} \right) \sigma = B_1 \sigma$$

Cuando se utiliza s^* , el gráfico S se construye:

$$LSC = \left(c_4 + 3\sqrt{1 - c_4^2} \right) \sigma = B_6 \sigma$$

$$LC = c_4 \sigma$$

$$LIC = \left(c_4 - 3\sqrt{1 - c_4^2} \right) \sigma = B_5 \sigma$$

ii) Caso μ, σ desconocidos.

(Si alguno de los dos fuera conocido sería un híbrido de los dos casos i) y ii)). Se estimaría μ a partir de la media de las medias ($\bar{\bar{x}}$) y σ a partir de la desviación típica muestral media (\bar{s} o \bar{s}^*) de k muestras iniciales.

A partir de $\bar{\bar{x}}$ y \bar{s} o \bar{s}^* se trazarían los límites provisionales de la manera siguiente. En el gráfico de medias si se utiliza \bar{s} :

$$LCS = \bar{\bar{x}} + \frac{3}{c_2} \frac{1}{\sqrt{n}} \bar{s} = \bar{\bar{x}} + A_1 \bar{s}$$

$$LC = \bar{\bar{x}}$$

$$LCI = \bar{\bar{x}} - \frac{3}{c_2} \frac{1}{\sqrt{n}} \bar{s} = \bar{\bar{x}} - A_1 \bar{s}$$

Si se utiliza \bar{s}^* :

$$LCS = \bar{\bar{X}} + \frac{3}{c_4} \frac{1}{\sqrt{n}} \bar{S}^* = \bar{\bar{X}} + A_3 \bar{S}^*$$

$$LC = \bar{\bar{X}}$$

$$LCI = \bar{\bar{X}} - \frac{3}{c_4} \frac{1}{\sqrt{n}} \bar{S}^* = \bar{\bar{X}} - A_3 \bar{S}^*$$

En el gráfico de desviaciones típicas, si se utiliza \bar{s} :

$$LSC = \left(c_2 + 3 \sqrt{1 - c_2^2 - \frac{1}{n}} \right) \frac{\bar{S}}{c_2} = B_4 \bar{S}$$

$$LC = \bar{S}$$

$$LSI = \left(c_2 - 3 \sqrt{1 - c_2^2 - \frac{1}{n}} \right) \frac{\bar{S}}{c_2} = B_3 \bar{S}$$

Si se utiliza \bar{s}^* :

$$LCS = \left(1 + \frac{3}{c_4} \sqrt{1 - c_4^2} \right) \bar{S}^* = B_4 \bar{S}^*$$

$$LC = \bar{S}^*$$

$$LCI = \left(1 - \frac{3}{c_4} \sqrt{1 - c_4^2} \right) \bar{S}^* = B_3 \bar{S}^*$$

Una vez trazados los límites provisionales, se estudiarían los puntos fuera de control y se recalcularía los límites de manera análoga al caso anterior. En las tablas siguientes se resume lo anterior:

GRÁFICOS DE MEDIAS			
DATOS CONOCIDOS	LCS	\underline{LC}	LCI
μ y σ	$\mu + A\sigma$	μ	$\mu - A\sigma$
σ	$\bar{\bar{X}} + A\sigma$	$\bar{\bar{X}}$	$\bar{\bar{X}} - A\sigma$
μ	$\mu + A_1\bar{S}$	μ	$\mu - A_1\bar{S}$
	$\mu + A_2\bar{R}$	μ	$\mu - A_2\bar{R}$
	$\mu + A_3\bar{S}^*$	μ	$\mu - A_3\bar{S}^*$
NINGUNO	$\bar{\bar{X}} + A_1\bar{S}$	$\bar{\bar{X}}$	$\bar{\bar{X}} - A_1\bar{S}$
	$\bar{\bar{X}} + A_2\bar{R}$	$\bar{\bar{X}}$	$\bar{\bar{X}} - A_2\bar{R}$
	$\bar{\bar{X}} + A_3\bar{S}^*$	$\bar{\bar{X}}$	$\bar{\bar{X}} - A_3\bar{S}^*$

Tabla 1

GRÁFICOS DE DISPERSIÓN				
DATOS CONOCIDOS		LCS	\underline{LC}	LCI
σ	S	$B_2\sigma$	$c_2\sigma$	$B_1\sigma$
	R	$D_2\sigma$	$d_2\sigma$	$D_1\sigma$
	S^*	$B_6\sigma$	$c_4\sigma$	$B_5\sigma$
NINGUNO	S	$B_4\bar{S}$	\bar{S}	$B_3\bar{S}$
	R	$D_4\bar{R}$	\bar{R}	$D_3\bar{R}$
	S^*	$B_4\bar{S}^*$	\bar{S}^*	$B_3\bar{S}^*$

Tabla 2

Control Estadístico de Procesos

TABLA DE COEFICIENTES

n	A	A ₁	A ₂	A ₃	c ₂	c ₄	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	B ₅	B ₆	d ₂	d ₃	D ₁	D ₂	D ₃	D ₄
2	2.121	3.760	1.880	2.659	0.5642	0.7979	0	1.943	0	3.267	0	2.606	1.128	0.853	0	3.686	0	3.267
3	1.732	2.394	1.023	1.954	0.7236	0.8862	0	1.858	0	2.568	0	2.276	1.693	0.888	0	4.358	0	2.575
4	1.500	1.880	0.729	1.628	0.7979	0.9213	0	1.808	0	2.266	0	2.088	2.059	0.880	0	4.698	0	2.282
5	1.342	1.596	0.577	1.427	0.8407	0.9400	0	1.756	0	2.089	0	1.964	2.326	0.864	0	4.918	0	2.115
6	1.225	1.410	0.483	1.287	0.8686	0.9515	0.026	1.711	0.030	1.970	0.029	1.874	2.534	0.848	0	5.078	0	2.004
7	1.134	1.277	0.419	1.182	0.8882	0.9594	0.105	1.672	0.118	1.882	0.113	1.806	2.704	0.833	0.205	5.203	0.076	1.925
8	1.061	1.175	0.373	1.099	0.9027	0.9650	0.167	1.638	0.185	1.815	0.179	1.751	2.847	0.820	0.387	5.307	0.136	1.864
9	1.000	1.094	0.337	1.032	0.9139	0.9693	0.219	1.609	0.239	1.761	.232	1.707	2.970	0.808	0.546	5.394	0.184	1.816
10	0.949	1.028	0.308	0.975	0.9227	0.9727	0.262	1.584	0.284	1.716	0.276	1.669	3.078	0.797	0.687	5.469	0.223	1.777
11	0.905	0.973	0.285	0.927	0.9300	0.9754	0.299	1.561	0.321	1.679	0.313	1.637	3.173	0.787	0.812	5.534	0.256	1.744
12	0.866	0.925	0.266	0.886	0.9359	0.9776	0.332	1.541	0.354	1.646	0.346	1.610	3.258	0.778	0.924	5.592	0.284	1.716
13	0.832	0.884	0.249	0.850	0.9410	0.9794	0.359	1.523	0.382	1.618	0.374	1.585	3.336	0.770	1.026	5.646	0.308	1.692
14	0.802	0.848	0.235	0.817	0.9453	0.9810	0.384	1.507	0.406	1.594	0.399	1.563	3.407	0.762	1.121	5.693	0.329	1.671
15	0.775	0.816	0.223	0.789	0.9490	0.9823	0.406	1.492	0.428	1.572	0.421	1.544	3.472	0.755	1.207	5.737	0.348	1.652
16	0.750	0.788	0.212	0.763	0.9523	0.9835	0.427	1.478	0.448	1.552	0.440	1.526	3.532	0.749	1.285	5.779	0.364	1.636
17	0.728	0.762	0.203	0.739	0.9551	0.9845	0.445	1.465	0.466	1.534	0.458	1.511	3.588	0.743	1.359	5.817	0.379	1.621
18	0.707	0.738	0.194	0.718	0.9576	0.9854	0.461	1.454	0.482	1.518	0.475	1.496	3.640	0.738	1.426	5.854	0.392	1.608
19	0.688	0.717	0.187	0.698	0.9599	0.9862	0.477	1.443	0.497	1.503	0.490	1.483	3.689	0.733	1.490	5.888	0.404	1.596
20	0.671	0.697	0.180	0.680	0.9619	0.9869	0.491	1.433	0.510	1.490	0.504	1.470	3.735	0.729	1.548	5.922	0.414	1.586
21	0.655	0.679	0.173	0.663	0.9630	0.9876	0.504	1.424	0.523	1.477	0.516	1.459	3.778	0.724	1.606	5.950	0.425	1.575
22	0.640	0.662	0.167	0.647	0.9655	0.9882	0.516	1.415	0.534	1.466	0.528	1.448	3.819	0.720	1.659	5.979	0.434	1.566
23	0.626	0.647	0.162	0.633	0.9670	0.9887	0.527	1.407	0.545	1.455	0.539	1.438	3.858	0.716	1.710	6.006	0.443	1.557
24	0.612	0.632	0.157	0.619	0.9684	0.9892	0.538	1.399	0.555	1.445	0.549	1.429	3.895	0.712	1.759	6.031	0.452	1.548
25	0.600	0.619	0.153	0.606	0.9696	0.9896	0.548	1.392	0.565	1.435	0.559	1.420	3.931	0.709	1.804	6.058	0.459	1.541
>25	3/√n	3/√n	1-3/√2n	1+3/√2n	1-3/√2n	1+3/√2n

Tabla 3

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{3}{\sqrt{n}} & c_2 &= \frac{s}{\sigma} & d_2 &= \frac{\bar{R}}{\sigma} & B_1 &= c_2 B_3 & D_1 &= d_2 - 3d_3 \\
 A_1 &= \frac{3}{c_2 \sqrt{n}} & c_4 &= c_2 \sqrt{\frac{n}{n-1}} & d_3 &= \sigma_w & B_2 &= c_2 B_4 & D_2 &= d_2 + 3d_3 \\
 A_2 &= \frac{3}{d_2 \sqrt{n}} & & & & & B_3 &= 1 - \frac{3}{c_4} \sqrt{(1-c_4^2)} & D_3 &= 1 - \frac{3d_3}{d_2} \\
 A_3 &= \frac{3}{c_4 \sqrt{n}} & & & & & B_4 &= 1 + \frac{3}{c_4} \sqrt{(1-c_4^2)} & D_4 &= 1 + \frac{3d_3}{d_2} \\
 & & & & & & B_5 &= c_4 - 3\sqrt{(1-c_4^2)} & & \\
 & & & & & & B_6 &= c_4 + 3\sqrt{(1-c_4^2)} & &
 \end{aligned}$$

EJEMPLO- 3: CONSTRUCCIÓN DE UN GRÁFICO DE SHEWHART

La galga de los platinos es una característica clave para su buen funcionamiento. La tabla siguiente recoge medidas de 20 muestras de tamaño

5. Construir los gráficos de control $\bar{X} - R$, $\bar{X} - S$ y $\bar{X} - S^*$

0,0061	0,0084	0,0076	0,0076	0,0044
0,0088	0,0083	0,0076	0,0074	0,0059
0,0080	0,0080	0,0094	0,0075	0,0070
0,0067	0,0076	0,0064	0,0071	0,0088
0,0087	0,0084	0,0088	0,0094	0,0086
0,0071	0,0052	0,0072	0,0088	0,0052
0,0078	0,0089	0,0087	0,0065	0,0068
0,0087	0,0094	0,0086	0,0073	0,0071
0,0074	0,0081	0,0086	0,0083	0,0087
0,0081	0,0065	0,0075	0,0089	0,0097
0,0078	0,0098	0,0081	0,0062	0,0084
0,0089	0,0090	0,0079	0,0087	0,0090
0,0087	0,0075	0,0089	0,0076	0,0081
0,0084	0,0083	0,0072	0,0100	0,0069
0,0074	0,0091	0,0083	0,0078	0,0077
0,0069	0,0093	0,0064	0,0060	0,0064
0,0077	0,0089	0,0091	0,0068	0,0094
0,0089	0,0081	0,0073	0,0091	0,0079
0,0081	0,0090	0,0086	0,0087	0,0080
0,0074	0,0084	0,0092	0,0074	0,0103

Tabla 4

SOLUCIÓN:

Dispongamos los cálculos en la tabla siguiente:

MUESTRA	1	2	3	4	5	Media	R	s*	s
1	0,006	0,008	0,008	0,008	0,004	0,007	0,004	0,0016	0,0014
2	0,009	0,008	0,008	0,007	0,006	0,008	0,003	0,0011	0,0010
3	0,008	0,008	0,009	0,008	0,007	0,008	0,002	0,0009	0,0008
4	0,007	0,008	0,006	0,007	0,009	0,007	0,002	0,0009	0,0008
5	0,009	0,008	0,009	0,009	0,009	0,009	0,001	0,0004	0,0003

Control Estadístico de Procesos

MUESTRA	1	2	3	4	5	Media	R	s	s
6	0,007	0,005	0,007	0,009	0,005	0,007	0,004	0,0015	0,0014
7	0,008	0,009	0,009	0,007	0,007	0,008	0,002	0,0011	0,0010
8	0,009	0,009	0,009	0,007	0,007	0,008	0,002	0,0010	0,0009
9	0,007	0,008	0,009	0,008	0,009	0,008	0,001	0,0005	0,0005
10	0,008	0,007	0,008	0,009	0,010	0,008	0,003	0,0012	0,0011
11	0,008	0,010	0,008	0,006	0,008	0,008	0,004	0,0013	0,0012
12	0,009	0,009	0,008	0,009	0,009	0,009	0,001	0,0005	0,0004
13	0,009	0,008	0,009	0,008	0,008	0,008	0,001	0,0006	0,0006
14	0,008	0,008	0,007	0,010	0,007	0,008	0,003	0,0012	0,0011
15	0,007	0,009	0,008	0,008	0,008	0,008	0,002	0,0007	0,0006
16	0,007	0,009	0,006	0,006	0,006	0,007	0,003	0,0013	0,0012
17	0,008	0,009	0,009	0,007	0,009	0,008	0,003	0,0011	0,0010
18	0,009	0,008	0,007	0,009	0,008	0,008	0,002	0,0007	0,0007
19	0,008	0,009	0,009	0,009	0,008	0,008	0,001	0,0004	0,0004
20	0,007	0,008	0,009	0,007	0,010	0,009	0,003	0,0012	0,0011
						Media	0,008	0,002	0,0010

Tabla 5

Método recorridos: $A_2 = 0,577$ $D_3 = 0$ $D_4 = 2,115$

Gráfico de medias:

$$LCS = 0,008 + 0,577 \times 0,002 = 0,0094$$

$$LC = 0,008$$

$$LCI = 0,008 - 0,577 \times 0,002 = 0,0066$$

Gráfico de recorridos:

$$LCS = 2,115 \times 0,002 = 0,005$$

$$LC = 0,002$$

$$LCI = 0,000 \times 0,008 = 0,000$$

En las figuras siguientes se representan el gráfico de medias y el de recorridos.

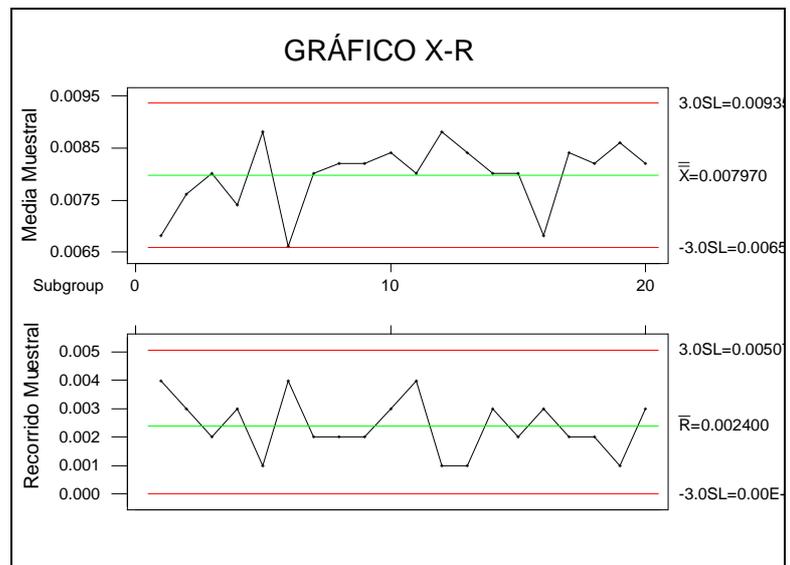


Figura 14: Gráfico X-R

Método s* $A_3 = 1,427$ $B_3 = 0$ $B_4 = 2,089$

Gráfico de medias:

$$LCS = 0,008 + 1,427 \times 0,0024 = 0,0114$$

$$LC = 0,008$$

$$LCI = 0,008 - 1,427 \times 0,0024 = 0,0045$$

Gráfico s*

$$LCS = 2,089 \times 0,0010 = 0,0020$$

$$LC = 0,0010$$

$$LCI = 0,000 \times 0,0010 = 0,0000$$

Método s $A_1 = 1,596$ $B_3 = 0$ $B_4 = 2,089$

Gráfico de medias:

$$LCS = 0,008 + 1,596 \times 0,0009 = 0,0093$$

$$LC = 0,008$$

$$LCI = 0,008 - 1,596 \times 0,0009 = 0,0066$$

Gráfico s

$$LCS = 2,089 \times 0,0009 = 0,0018$$

$$LC = 0,0009$$

$$LCI = 0,000 \times 0,0009 = 0,0000$$

8. CURVAS DE OPERACIÓN DEL GRÁFICO DE CONTROL

Las curvas de operación son útiles para evaluar a priori la sensibilidad del gráfico de control frente a desplazamiento del proceso o al cambio de su variabilidad. De estas curvas se deduce que el hecho de que “los puntos estén dentro de los límites” proporciona muy poca seguridad de que el proceso se encuentre realmente bajo control estadístico y pone de manifiesto las limitaciones de esta técnica. La aplicación de gráficos de control debe continuarse con técnicas estadísticas avanzadas encaminadas al conocimiento de los parámetros que influyen en el proceso (CTP en terminología 6 Sigma) y a la reducción de la variabilidad (o lo que es lo mismo, al aumento de los índices de capacidad).

8.1. CURVA DE OPERACIÓN DEL GRÁFICO DE MEDIAS.

Si se mide el desplazamiento del proceso en unidades de la desviación típica y la deformación mediante la relación existente entre la desviación típica final y la inicial, es decir:

$$d = \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma_0} \quad \lambda = \frac{\sigma_1}{\sigma_0}$$

La probabilidad de que la media muestral caiga dentro de los límites de control en función de (d, λ) es:

$$P(d, \lambda) = P\left(\frac{\mu_1 - LCI}{\sigma_1 / \sqrt{n}} \leq \frac{\bar{x} - \mu_1}{\sigma_1 / \sqrt{n}} \leq \frac{LCS - \mu_1}{\sigma_1 / \sqrt{n}}\right) = P\left(-\frac{(d+3)\sqrt{n}}{\lambda} \leq \frac{\bar{x} - \mu_0 - d\sigma_0}{\lambda\sigma_0 / \sqrt{n}} \leq \frac{(3-d)\sqrt{n}}{\lambda}\right)$$

Si analizamos ahora los dos efectos por separado y dibujamos las curvas para distintos tamaños de muestras, vemos que el gráfico de medias es sensible al desplazamiento y muy poco sensible al cambio de la variabilidad (ver **Figura 15** y **Figura 16**).

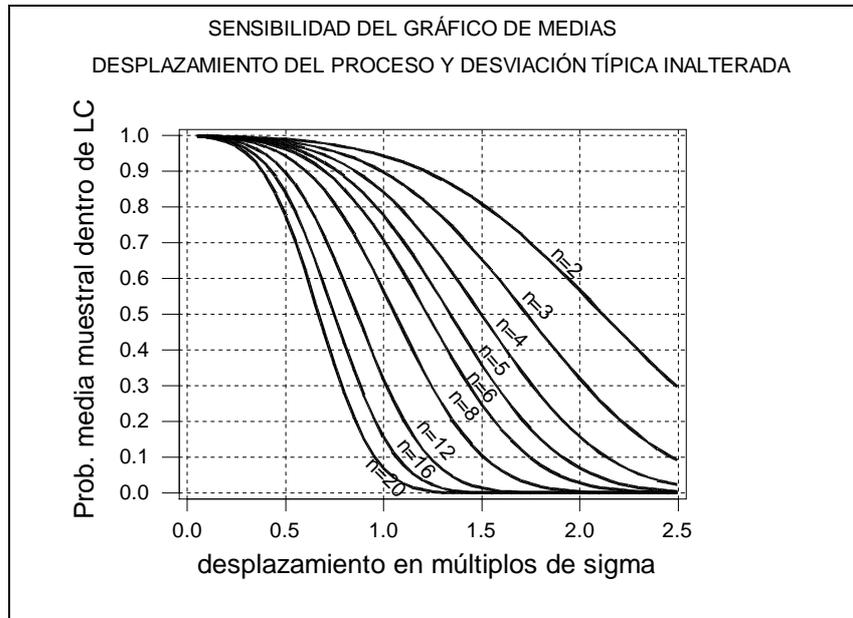


Figura 15: Curva de operación del Gráfico R al desplazamiento de la media

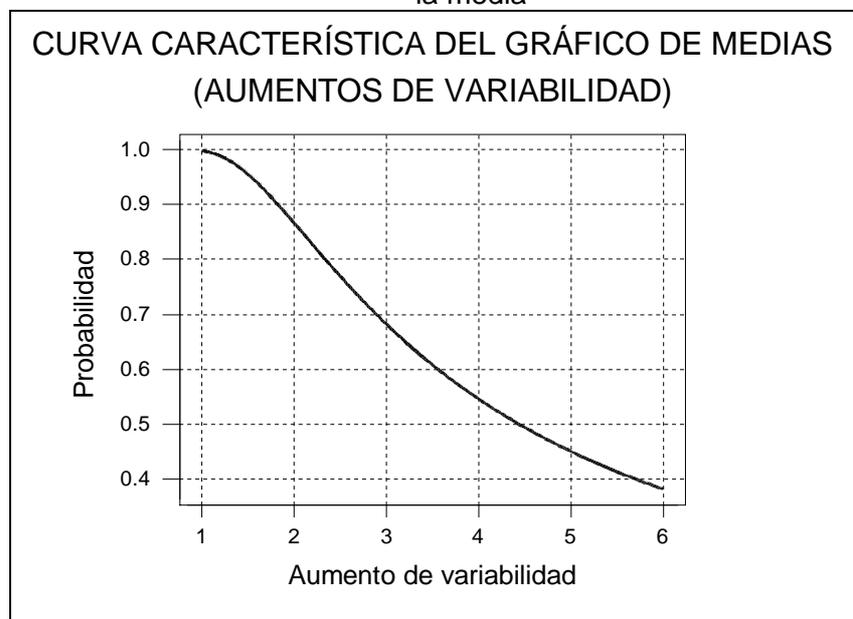


Figura 16: Curva de operación del Gráfico X al aumento de la variabilidad

8.2. CURVA DE OPERACIÓN DEL GRÁFICO DE DISPERSIÓN.

La construcción de la curva de operación del gráfico de recorridos se hace aprovechando el estadístico $w = R/\sigma$. La ecuación de la curva será:

$$P(\lambda) = P(D_1\sigma_0 \leq w\lambda\sigma_0 \leq D_2\sigma_0)$$

Para el caso del gráfico S, la probabilidad de que una muestra caiga dentro de los límites de control puede hacerse utilizando el estadístico:

$$\frac{ns^2}{\sigma^2} = \chi_{n-1}^2$$

Entonces la ecuación de la curva de operación es:

$$P(\lambda) = P\left(\frac{B_1\sigma_0^2}{\sigma_1^2}n \leq \frac{s^2}{\sigma_1^2}n \leq \frac{B_2\sigma_0^2}{\sigma_1^2}n\right) = P\left(\frac{B_1}{\lambda^2}n \leq \frac{s^2}{\lambda^2\sigma_0^2}n \leq \frac{B_2}{\lambda^2}n\right)$$

Se puede comprobar que el comportamiento es similar para muestras pequeñas. Sin embargo para muestras $n > 6$ es más eficaz el gráfico S.

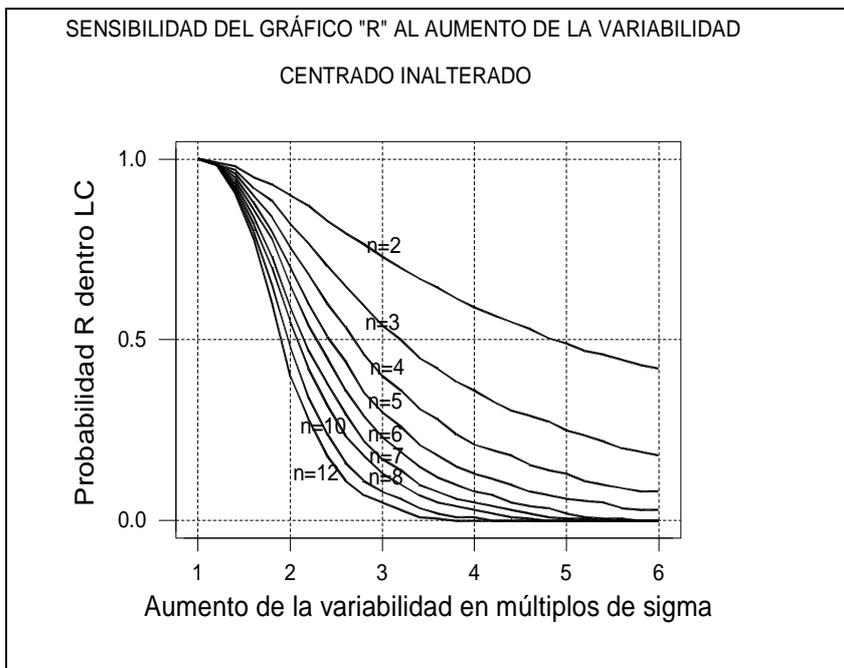


Figura 17: Curva de operación del Gráfico R al aumento de la variabilidad

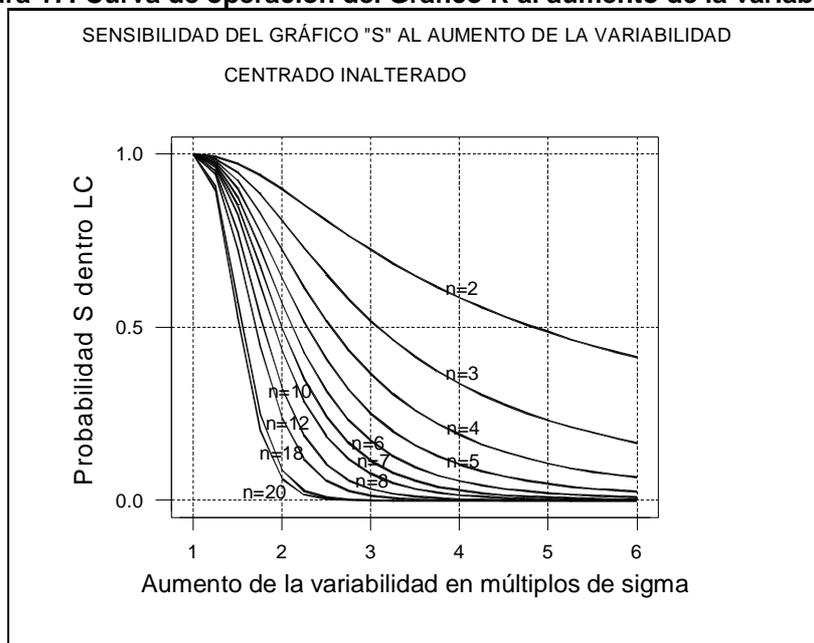


Figura 18: Curva de operación del Gráfico S al aumento de la variabilidad

9. INTERPRETACIÓN DE LAS INDICACIONES DEL GRÁFICO DE CONTROL

La indicación más clara de que el proceso está fuera de control es que alguno de los puntos esté fuera de los límites. Además el aspecto de los gráficos pueden indicar anomalías en el proceso. En efecto, si dividimos el gráfico en zonas A, B y C, ver Figura 19, el porcentaje de puntos contenidos en cada una de ellas deberá acercarse sensiblemente al área relativa de la campana de Gauss cubierta por cada una de ellas.

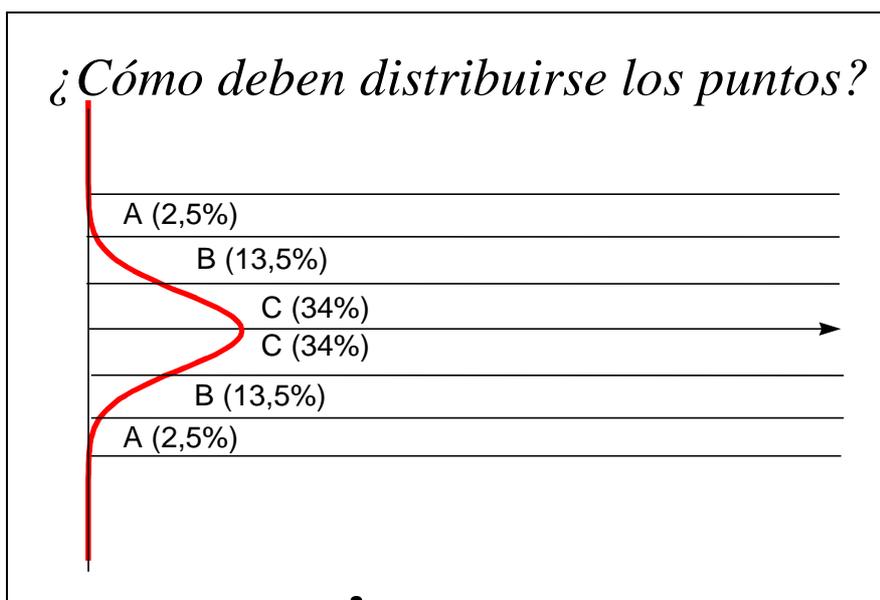


Figura 19: Distribución de los puntos procedentes de una distribución normal

En la Tabla 6 se incluyen algunas reglas utilizadas frecuentemente para analizar el gráfico de medias y establecer si el proceso se encuentra fuera de control. En la columna de la derecha se indica la probabilidad de que se diera esta circunstancia en el caso de un proceso normal, centrado (lo que daría lugar a una decisión errónea). En general, un procedimiento de SPC debe explicitar qué indicaciones deben considerarse como síntoma de proceso fuera de control.

Regla	Descripción	Probabilidad
1	Un punto está fuera de los límites de control	0,27%
2	De tres puntos consecutivos, dos o más están en una de las zonas A (la misma).	0,15%
2'	Dos puntos consecutivos están en una de las zonas A (la misma).	0,05%
3	Racha de cinco puntos en la que cuatro están en la misma zona A o B.	0,27%
3'	Racha de cuatro puntos consecutivos que están en la misma zona A o B.	0,06%
4	Racha de siete puntos consecutivos por encima de la línea central.	0,78%
4'	Racha de seis puntos consecutivos por encima de la línea central.	1,56%
4''	Racha de ocho puntos consecutivos por encima de la línea central.	0,39%
5	Racha de seis puntos consecutivos se presentan de manera monótona creciente.	0,14%
6	De diez puntos consecutivos, existe una racha de 8 que se presentan de manera monótona creciente.	0,07%
6'	De nueve puntos consecutivos, existe una racha de 8 que se presentan de manera monótona creciente.	0,02%
6''	De nueve puntos consecutivos, existe una racha de 7 que se presentan de manera monótona creciente.	0,42%
7	Dados dos puntos consecutivos, el segundo está al menos cuatro desviaciones típicas por encima del primero (por ejemplo, el primero está en la zona A inferior y el segundo en la B ó A superior).	0,23%
8	Racha de quince puntos en la zona C	0,30%
9	Racha de catorce puntos alternativos ascendente descendente	?

Tabla 6

A continuación veamos cómo se pueden interpretar estas indicaciones:

- a) **Reglas 1, 2, 3, 3', 4, 4', 4'' y 7.** Si el gráfico de medias presenta alguna de estas indicaciones y el gráfico S o R no presenta anomalías, lo más probable es que el proceso se encuentre desplazado. Si el gráfico S o R presenta también indicaciones, entonces el proceso ha aumentado la variabilidad y posiblemente también se ha desplazado.

- b) **Reglas 5, 6, 6', 6''**. Lo más probable es que el proceso esté desplazándose.
- c) **Regla 7**. Si el gráfico S o R no presenta anomalías, lo más probable es que el proceso sea muy inestable en cuanto a su centrado. Si el gráfico S o R presenta también indicaciones, entonces es probable que el proceso haya aumentado la variabilidad.
- d) **Regla 8**. que Puede ser síntoma de que se ha reducido la variabilidad del proceso si el gráfico S o R también muestra una reducción de la variabilidad muestral. Si el gráfico S o R no muestra una reducción de la variabilidad muestral, puede ocurrir que se estén mezclando dos poblaciones distintas, siendo la distribución resultante bimodal (dos jorobas).
- e) **Regla 9**. Es síntoma de inestabilidad del proceso.

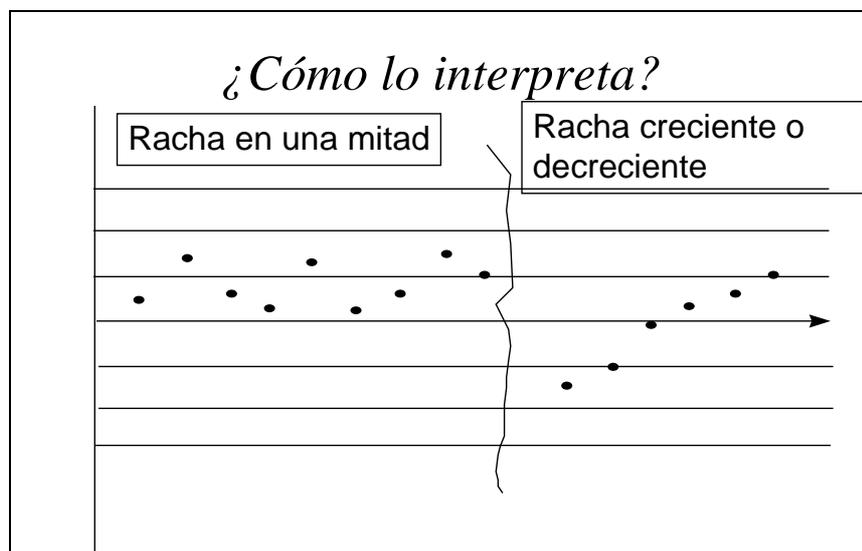


Figura 20: Tendencias que indican causas especiales

Para el caso del gráfico S o R se puede establecer un conjunto de reglas parecidas, pero es necesario tener en cuenta lo siguiente:

- a) La interpretación de la indicación ha de hacerse en función a la naturaleza del gráfico S o R, es decir, no indican derivas en la

media del proceso sino aumento o disminución en la variabilidad del mismo.

- b) La distribución de S o R no es normal (aunque lo sea el proceso) ni tampoco es simétrica, por lo que las probabilidades indicadas en la columna de la derecha no son de aplicación a este caso.

10. ESTUDIO DE CAPACIDAD DE PROCESOS

10.1. ¿QUÉ ES UN ESTUDIO DE CAPACIDAD DE PROCESO?

Un estudio de capacidad de proceso tiene por objeto de conocer:

- **Distribución estadística que lo describe (normal o no normal)**
- **El patrón de variabilidad del proceso y principales factores relacionados con la variabilidad.**
- **Comprender los fenómenos físicos y tecnológicos importantes para el proceso**

Se realiza tomando muestras de la producción. A partir de aquí existen muchas diferencias en cuanto al modo de tomar las muestras. En particular es frecuente que se requiera que el proceso esté en control estadístico. Este requisito es lógico cuando se pretende calcular los índices c_p y c_{pk} de variabilidad a corto plazo. En general, cuando se desee estimar la variabilidad total del proceso (conocida también como variabilidad a largo plazo), las muestras deben ser representativas de la producción, por ejemplo debe incluir producciones con lotes distintos de materia prima, realizada por operarios diferentes, en varios turnos, etc.

Obviamente, según sea el modo en el que se tomen las muestras los resultados serán muy diferentes. En los párrafos siguientes se dan algunas directrices que pueden ayudar a diseñar un estudio de capacidad de proceso y a interpretar sus resultados.

10.2. ¿CÓMO SE REALIZA UN ESTUDIO DE CAPACIDAD DE PROCESO?

En la realización de un estudio de capacidad de proceso es importante realizar los siguientes pasos.

10.2.1. Comprender los fenómenos físicos y tecnológicos importantes para el proceso

Naturalmente de un proceso no se conoce “todo”, ya que si fuera así no tendría sentido realizar otro estudio sobre él. Sin embargo normalmente se saben algunos aspectos que deben tenerse en cuenta, ya que influirán en los datos. Por ejemplo, si se trata de un proceso de mecanizado, es esperable que el desgaste de la herramienta produzca un desplazamiento de la media, etc. Como resultado de la revisión de los conocimientos disponibles se puede llegar a lo siguiente:

- **Establecimiento de las posibles fuentes de variabilidad del proceso (por ejemplo una deriva temporal en el caso del mecanizado, variabilidad entre lotes, variabilidad posicional en la pieza, etc.).**
- **Verosimilitud de esperar una distribución normal de los datos o si por el contrario existe alguna razón (por ejemplo asimetrías) que sugieren otro tipo de distribución.**

10.2.2. Definición de la estratificación de las medidas a tomar

En función de las consideraciones anteriores, se debe definir el Grupo Homogéneo Racional (GHR) del que se tomarán las muestras y que se espera que estén libres de causas especiales, de manera que la variación dentro de estos grupos pueda ser representativa de la variación del proceso cuando se eliminen todas las causas especiales. Por ejemplo, si se han identificado como posibles fuentes de variabilidad de un proceso de mecanizado de un vástago cilíndrico:

- **El desgaste de la herramienta (asociado al tiempo de trabajo).**
- **El proveedor de la materia prima.**
- **El lote suministrado por el proveedor.**
- **Si el diámetro medido corresponde a la primera cara o a la segunda (posición en la pieza).**

En este caso cuando se mida la muestra es necesario identificar la hora en la que se fabricó la pieza, qué proveedor y qué lote de materia prima se empleó y a qué cara corresponde la medida, ya que de otro modo será imposible cuantificar las fuentes de variabilidad.

En todos los casos debe pensarse que la propia medida puede ser una fuente de variabilidad más, por lo que deben tomarse las siguientes precauciones:

- **Debe definirse el procedimiento de medida con todo detalle. En un caso simple como este, podría bastar con**

indicar a un técnico de taller que la medida debe tomarse con un micrómetro calibrado y medirse dos diámetros a 90° y calcular la media. Si la medida fuese más compleja, sería necesario establecer un procedimiento escrito.

- Si no se conoce la repetibilidad y reproducibilidad del método de medida a emplear, debe realizarse un estudio R&R (repetibilidad y reproducibilidad). Los estudios R&R también se conocen como estudios MSA (Measurement System Analysis)

Como resultado de esta fase debe prepararse al menos una plantilla de recogida de datos que evite que se produzcan errores en la recogida o registro de los mismos.

10.2.3. Estabilizar del proceso

Para tomar los datos, el proceso debe operar de manera que el GRH se encuentre libre de otras posibles causas especiales.

Para que tenga sentido la aplicación de los gráficos de control, el proceso ha de tener una estabilidad suficiente que, aún siendo aleatorio, permita un cierto grado de predicción. En general, un proceso caótico no es previsible y no puede ser controlado. A estos procesos no se les puede aplicar el gráfico de control ni tiene sentido hablar de un estudio de capacidad. Un proceso de este tipo debe ser estudiado mediante herramientas estadísticas avanzadas hasta que el grado de conocimiento empírico obtenido sobre el mismo permita estabilizarlo.

10.2.4. Toma de los datos

Generalmente la toma de los datos se extiende en el tiempo y se toman a través de un operario. Este intervalo de tiempo puede ser largo si se pretende capturar fuentes de variabilidad cíclica. Consecuentemente las posibilidades de errores por “malos entendidos” son altas. Por esta razón es muy importante definir una plantilla de toma de datos lo más explícita posible y no esperar a que estén todos los datos tomados para “echar un vistazo”. Debe evitarse la situación de descubrir que los datos que se han ido tomando durante semanas...no valen para nada.

10.2.5. Identificación del patrón de variabilidad

Uno de los objetivos del estudio establecidos en el párrafo 10.1 es identificar el patrón de la variabilidad y los principales factores relacionados con la variabilidad. Para ello resultan de la máxima utilidad herramientas como el gráfico Multivari y la técnica de análisis de componentes de la varianza.

10.2.6. Comprobación de la normalidad de los datos

Una vez obtenidos los datos se debe comprobarse la normalidad. Al menos deben ser normales los datos correspondientes al mismo GHR (en caso de que los datos en su conjunto no sean normales, pero si lo sean los datos de los GHR, quiere decir que alguno de los criterios seguidos en la estratificación de las muestras es una causa especial).

En caso de que por consideraciones tecnológicas (véase 10.2.1) o el análisis de los datos indique que no son normales, debe realizarse una transformación normalizadora (véase párrafo 11.3).

Es preciso tener en cuenta que, si los datos no son normales, no son válidas las predicciones de fracción defectuosa realizadas en el estudio. En el párrafo 11 se indica cómo proceder en casos en los que los datos no sean normales.

Para comprobar la normalidad se pueden emplear los contrastes de ajuste habituales (χ^2 , Kolmogorov-Smirnov, etc.). La prueba de normalidad más sencilla y utilizada en ingeniería de calidad es la que se basa en el "*papel probabilístico normal*". Este papel tiene la escala de ordenadas modificada de manera que las probabilidades acumuladas de datos de una muestra procedente de una distribución normal, resulten alineados.

APLICACIÓN MINITAB

Dentro del menú **Graph->Probability Plot**, Minitab cuenta con contrastes gráficos de ajuste para varias distribuciones. Si se selecciona la distribución normal y se representan los datos del Ejemplo 3 (ver Figura 21) se observa que alguno de los valores de los extremos está fuera de las bandas de confianza del 95%, lo que es un indicio de falta de normalidad.

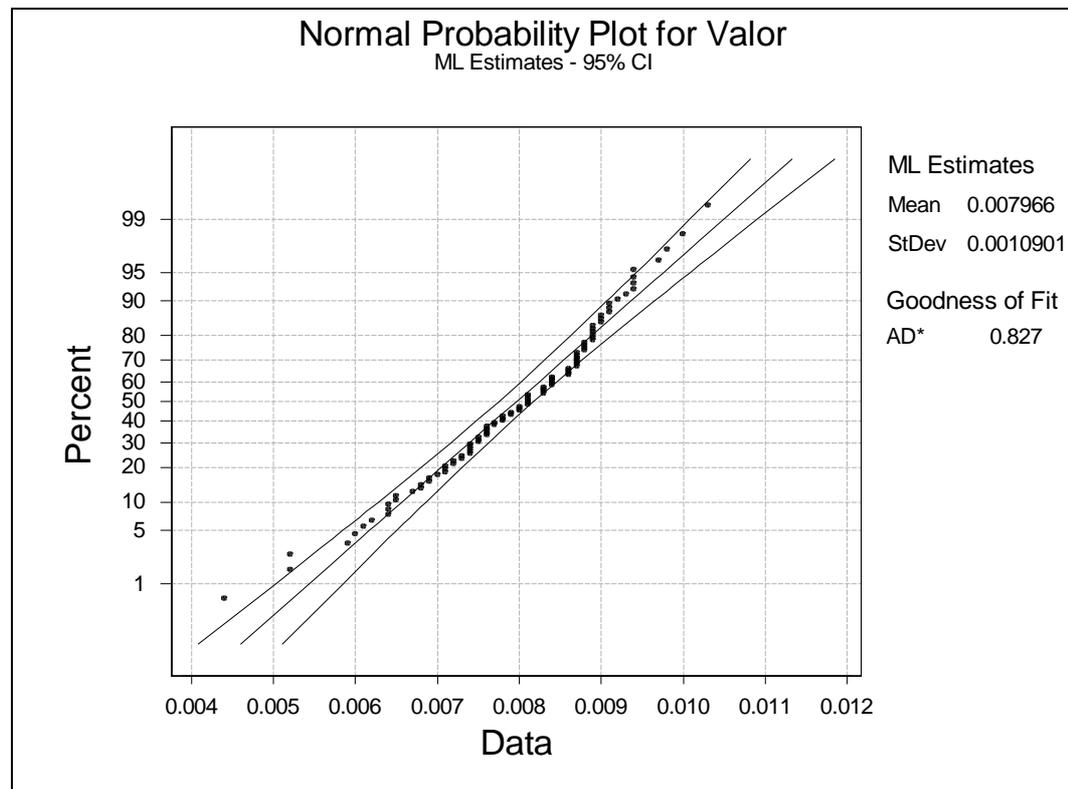


Figura 21: Graph->Probability-Plot->Normal

10.2.7. Análisis e interpretación de los datos

A continuación debe comprobarse la estabilidad del proceso para lo que debe realizarse un gráfico de control a las medias de los Grupos Homogéneos Racionales comprobando que no existen puntos fuera de control. En caso de que exista algún punto fuera de control, debe estudiarse la causa para su eliminación.

Una vez hecho esto, debe realizarse la estimación de la desviación típica. En general deben seguirse los siguientes criterios:

- Si el tamaño de los grupos es igual o mayor que 10, no se empleará nunca el método del recorrido medio.
- Si se sospecha que la desviación típica es sensiblemente constante, se puede emplear el método de la desviación típica promediada ("pooled standard deviation").

$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + \dots + (n_k - 1)s_k^2}{n_1 + \dots + n_k - k}$$

APLICACIÓN MINITAB

Dentro del menú **Stat->Control Charts-> Xbar-R**, Si se selecciona la columna en la que están los datos y se indican el tamaño del lote = 5, se obtiene la Figura 22. En ella puede apreciarse dos puntos fuera de control, lo que indica que la variabilidad a corto plazo, representada por los índices c_p y c_{pk} no debe utilizarse para cuantificar la variabilidad total del proceso.

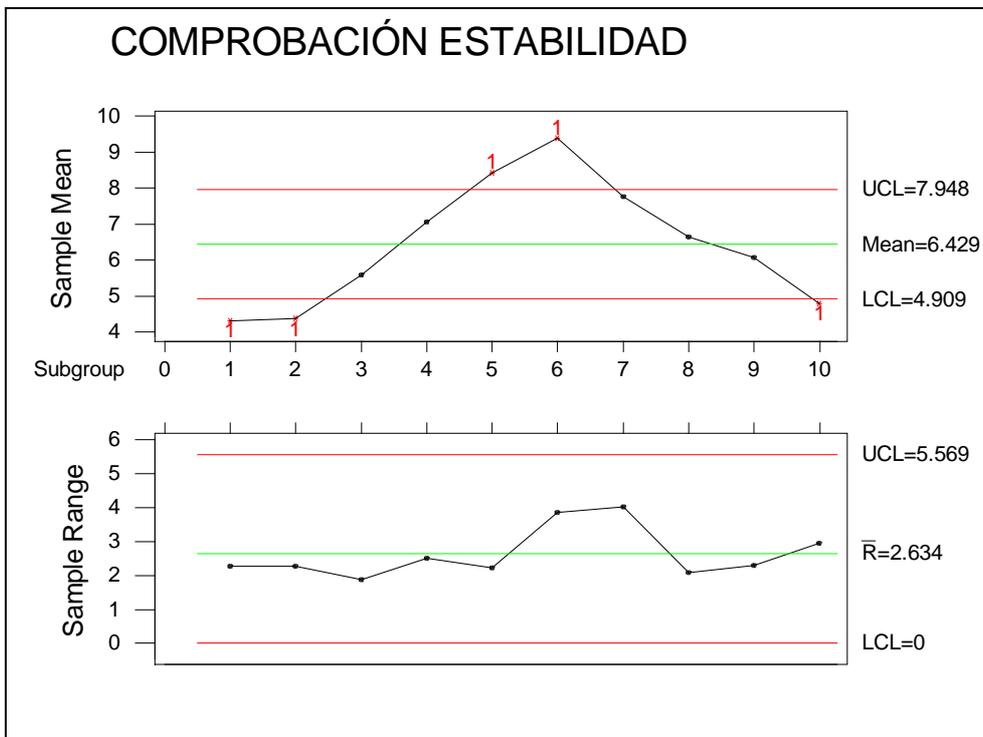


Figura 22 Stat->Control Charts-> Xbar-R

EJEMPLO- 4: MÉTODOS DE ESTIMACIÓN DE LA VARIABILIDAD. CÁLCULO DE LOS ÍNDICES

La variabilidad inherente del proceso (σ_{CP}) puede estimarse a través del recorrido muestral medio \bar{R} , (para tamaños de muestra $n < 10$), y también puede hacerse a través de la media ponderada de las desviaciones típicas muestrales. Veamos un ejemplo con los datos de la Tabla 7).

Tolerancia superior: 10.00
Tolerancia superior: 5.00

	Muestra 1	Muestra 2	Muestra 3	Muestra 4	Muestra 5	Muestra 6	Muestra 7	Muestra 8	Muestra 9	Muestra 10
Pieza 1	5.35	4.55	5.05	7.41	9.23	8.92	9.08	7.18	5.35	4.45
Pieza 2	3.96	5.85	5.41	8.02	6.99	11.53	6.95	6.75	5.98	4.57
Pieza 3	4.70	4.13	6.18	7.19	9.17	9.37	7.13	6.66	5.03	4.88
Pieza 4	4.40	3.59	6.54	7.11	8.58	9.37	9.81	5.24	7.32	3.54
Pieza 5	3.07	3.66	4.68	5.51	8.11	7.68	5.78	7.32	6.59	6.49
MEDIA	4.30	4.36	5.57	7.05	8.42	9.38	7.75	6.63	6.05	4.78
RANGO	2.27	2.26	1.87	2.51	2.23	3.85	4.03	2.08	2.29	2.95
Sm	0.85	0.92	0.78	0.93	0.92	1.39	1.65	0.83	0.93	1.08

Tabla 7

$$\bar{x} = 6.43$$

$$\bar{R} = \frac{2.27 + 2.26 + 1.87 + 2.51 + 2.23 + 3.85 + 4.03 + 2.08 + 2.29 + 2.95}{10} = 2.63$$

$$\bar{s}_M = \frac{0.85 + 0.92 + 0.78 + 0.93 + 0.92 + 1.39 + 1.65 + 0.83 + 0.93 + 1.08}{10} = 1.03$$

A partir de estos estadísticos se puede estimar la σ_{CP} :

$$\hat{\sigma}_{CP} = \frac{\bar{R}}{d_2(n=5)} = \frac{2.63}{2.3626} = 1.11$$

$$\hat{\sigma}_{CP} = \frac{\bar{s}_M}{c_4(n=5)} = \frac{1.03}{0.9400} = 1.09$$

Donde d_2 y c_4 son dos coeficientes tabulados, función del tamaño de la muestra, que corrigen el sesgo del estimador.

Si lo que se pretende es estimar la variabilidad total del proceso (σ_{LP}) ha de hacerse a través de la desviación típica de todas las piezas medidas con independencia de la muestra a la que pertenezcan. En los datos anteriores:

$$\hat{\sigma}_{LP} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{50} (x_i - 6.43)^2}{50-1}} = 1.92$$

Como conclusión:

- Las dos estimaciones realizadas de la variabilidad inherente del proceso (σ_{CP}) son bastante próximas (por ser el tamaño de la muestra pequeño, $n=5$).
- Como era de esperar, la estimación de la variabilidad total $\sigma_{LP} > \sigma_{CP}$.
- Los valores de los índices de capacidad son:
 - $C_p(\text{método R}) = 0.75$
 - $C_{pk}(\text{método R}) = 0.53$
 - $C_p(\text{método S}) = 0.76$
 - $C_{pk}(\text{método S}) = 0.55$
 - $P_p = 0.43$
 - $P_{pk} = 0.31$

Como ya se anticipó a la vista de la Figura 22, la variabilidad entre lotes es muy importante, lo que hace que la variabilidad a largo plazo sea muy superior a la variabilidad a corto plazo.

10.2.8. Construcción de un intervalo de confianza de los índices

Es preciso tener siempre presente que estos índices, al ser función de una variable aleatoria y estar calculados a través de estadísticos (valores numéricos calculados a partir de los datos muestrales), están sometidos a una variación aleatoria. Por esta razón la buena práctica estadística aconseja construir un intervalo de confianza. Este intervalo podría basarse en la conocida relación:

$$\sigma^2 \propto \frac{(n-1)s^2}{\chi_{n-1}^2}$$

que llevaría a los siguientes límites del intervalo de confianza para la varianza.

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi_{n-1}^2(1-\alpha/2)} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)s^2}{\chi_{n-1}^2(\alpha/2)}$$

y para el índice c_p :

$$\sqrt{\frac{\chi_{n-1}^2(1-\alpha/2)}{n-1}} \leq c_p \leq \sqrt{\frac{\chi_{n-1}^2(\alpha/2)}{n-1}}$$

Sin embargo, para que esto sea cierto, es necesario una buena normalidad de los datos, hecho que no siempre se cumple. Por esta razón resulta más apropiado recurrir a métodos de estimación no paramétricos (por ejemplo, método de bootstrap).

11. CASO DE PROCESOS NO NORMALES

11.1. ¿ES LA NORMALIDAD LO “NORMAL?”

Existen procesos que incorporan a su naturaleza alguna causa especial que hace que su distribución no sea normal y consecuentemente no tiene sentido esperar su normalidad ni iniciar acciones correctoras para “meter el proceso en control estadístico”.

Un caso típico son aquellos procesos que tienen alguna “barrera” que impide que la variable aleatoria pueda tomar valores desde $-\infty$ a $+\infty$. Por ejemplo, un proceso de taladrado en el que el diámetro de la broca es el límite inferior del posible taladro, procesos químicos en el que se va añadiendo espesos de capas, etc.

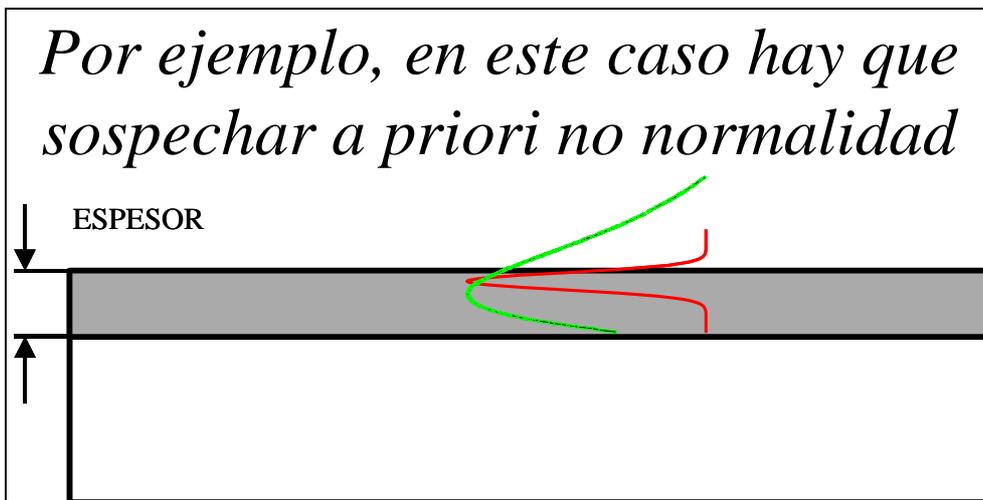


Figura 23 Si la variabilidad es grande en relación con el espesor medio, es de esperar una distribución asimétrica

11.2. CONSECUENCIAS QUE TIENE EN EL ANÁLISIS.

Cuando el proceso no sigue una distribución normal debido a causas intrínsecas a su propia naturaleza, lo expuesto anteriormente se ve afectado de la siguiente manera:

- La interpretación de los índices \bar{y} y s en cuanto a la fracción de producto fuera de tolerancia ha de hacerse para la distribución que siga el proceso. Si no se conoce la distribución, utilizando la desigualdad de Tchebichef, sólo se puede asegurar que la cola situada más allá de 3σ de la media no es superior a $1/9=11\%$ (frente a $0,135\%$ en el caso de un proceso normal).
- Los coeficientes utilizados para estimar σ_S y σ_R no son válidos y por lo tanto tampoco lo son los límites de control calculados para el gráfico de medias y recorridos.
- Es posible que la distribución del gráfico de medias sea a pesar de todo normal en virtud del TLC. No obstante si la distribución del proceso tiene un grado elevado de asimetría sería necesario que el tamaño de la muestra fuese superior a 25 o 30 (en lugar de 4 ó 5 como es habitual) para que se pudiera considerar normal a la distribución de las medias.

En estos casos, lo más recomendable es proceder como sigue:

- Puesto que la causa de no normalidad es intrínseca al proceso, se toma una muestra de al menos 25 o 30 unidades, de manera que la distribución de la muestra sea lo más próxima a la normal posible. De esta manera se puede mantener el control de las derivas en el proceso.
- Estudiar la distribución (calcular media, desviación típica y coeficiente de asimetría). En el caso de que la distribución no se encuentre contenida en el intervalo de tolerancias, ya se puede anticipar la incapacidad del proceso. Si se encuentra contenida en el intervalo de tolerancias de manera muy ajustada, es posible que el resto de las causas de variación presentes en la operación habitual del proceso haga que parte de la producción esté fuera de tolerancia.
- Realizar una transformación de normalización de los datos. En general resultan eficaces las transformaciones de Box-Cox (ver 11.3).
- Una vez determinada la transformación numérica de normalización, si se codifican los valores tomados en las muestras, se puede tratar como los procesos vistos hasta ahora. Naturalmente para interpretar los valores de los límites de control, fracción fuera de tolerancia, etc. es preciso deshacer la transformación.

11.3. TÉCNICAS DE NORMALIZACIÓN DE LOS DATOS.

La técnica de normalización de datos más eficaz es la transformación de Box-Cox. Esta transformación es la siguiente:

$$x^{(\lambda)} = \begin{cases} \frac{(x+m)^\lambda - 1}{\lambda} & (\lambda \neq 0) \quad (\forall x \quad x > -m) \\ \ln(x+m) & (\lambda = 0) \quad (m > 0) \end{cases}$$

Es continua en λ , puesto que:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} x^{(\lambda)} = \ln(x+m)$$

La función de verosimilitud de los datos normalizados es:

$$L(\lambda) = -\frac{1}{n} \ln(\hat{\sigma}^2(\lambda)) + (\lambda - 1) \sum_{i=1}^n \ln(x_i)$$

Donde:

$$\hat{\sigma}^2(\lambda) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x^{(\lambda)} - \bar{x}^{(\lambda)})^2$$

La técnica consiste en hallar el valor de λ que maximiza la verosimilitud (ver Figura 24).

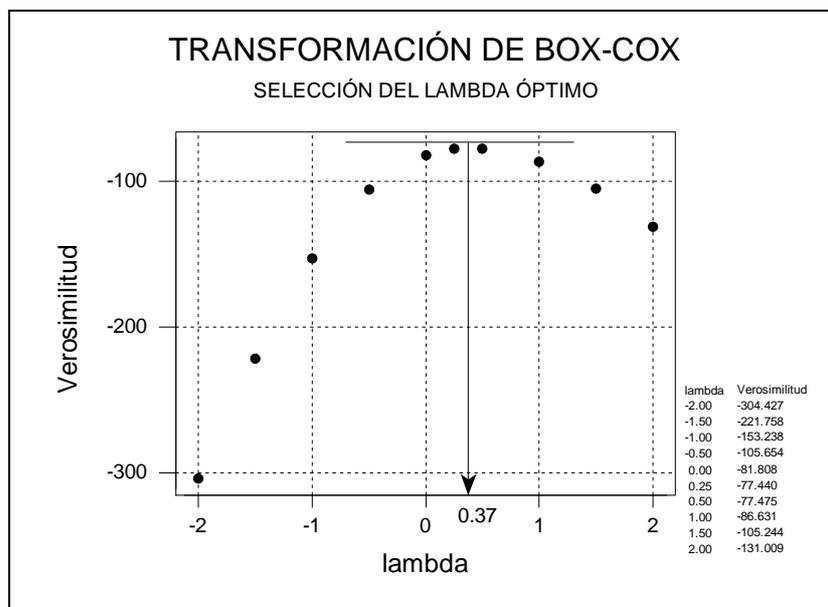


Figura 24: Transformación de Box-Cox para normalizar los datos

Según sea el origen de los datos, en algunos casos se puede esperar heterocedasticidad de los mismos (varianza no constante). Según esté relacionada la varianza y la media, resultan apropiadas las transformaciones indicadas en la Tabla 8 .

Relación media-varianza	λ	Transformación estabilizadora de la varianza	Ejemplos típicos de aplicación
$\sigma \propto \eta^2$	-1	Inversa	
$\sigma \propto \eta^{1.5}$	-1/2	Inversa de la raíz cuadrada	
$\sigma \propto \eta$	0	Logaritmo	Análisis de varianzas muestrales, gráficos de control de series cortas en el que se conjuguen familias de varios espesores.
$\sigma \propto \eta^{0.5}$	1/2	Raíz cuadrada	Datos procedentes de una distribución de Poisson.
$\sigma \propto const$	1	No se transforma	

Tabla 8: Transformaciones de datos para eliminar la heterocedasticidad

EJEMPLO- 5: NORMALIZACIÓN DE DATOS DE UN PROCESO NO NORMAL

En la Figura 25 se ha representado el histograma de un proceso de protección superficial. A la vista del citado histograma, se concluye la no normalidad de los datos. Se desea realizar una transformación que los normalice.

APLICACIÓN MINITAB

Menú **Stat->Control Charts->Box-Cox Transformation**. Los datos corresponden a muestras de tamaño 5 de 25 lotes. La respuesta proporcionada por MINITAB es la indicada en la Figura 26, en la que se indica $\lambda=0.113$ como el valor óptimo. Una vez transformados los datos, se puede comprobar su normalidad mediante un histograma (ver Figura 27) o un papel probabilístico, de modo análogo al hecho anteriormente (ver Figura 28).

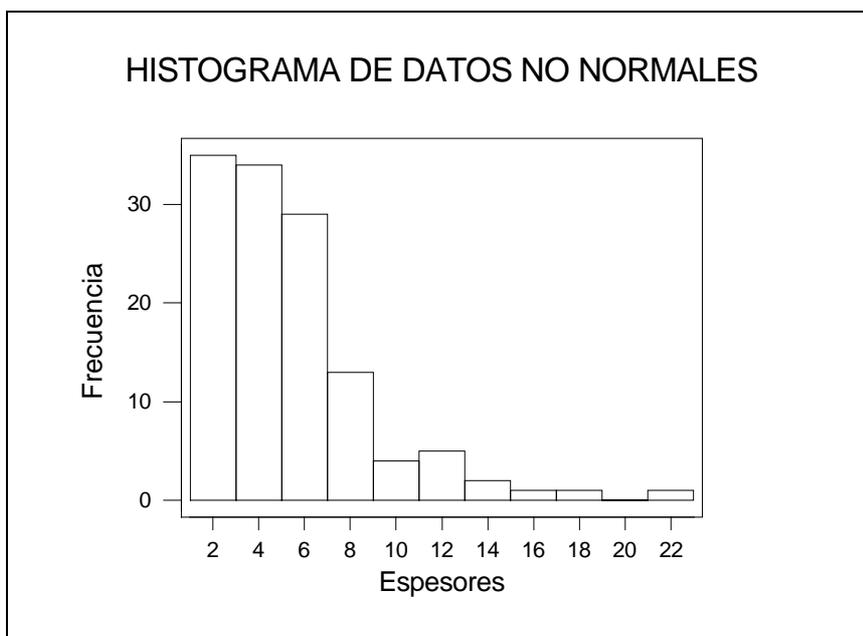


Figura 25: Histograma de datos de un proceso no normal

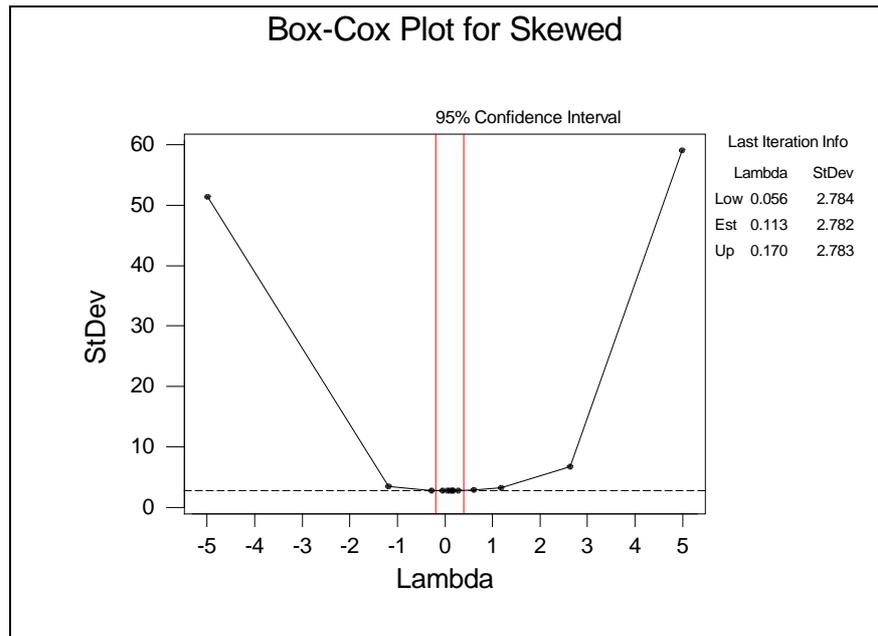


Figura 26: Transformación de Box-Cox (Stat->Control Charts->Box-Cox Transformation)

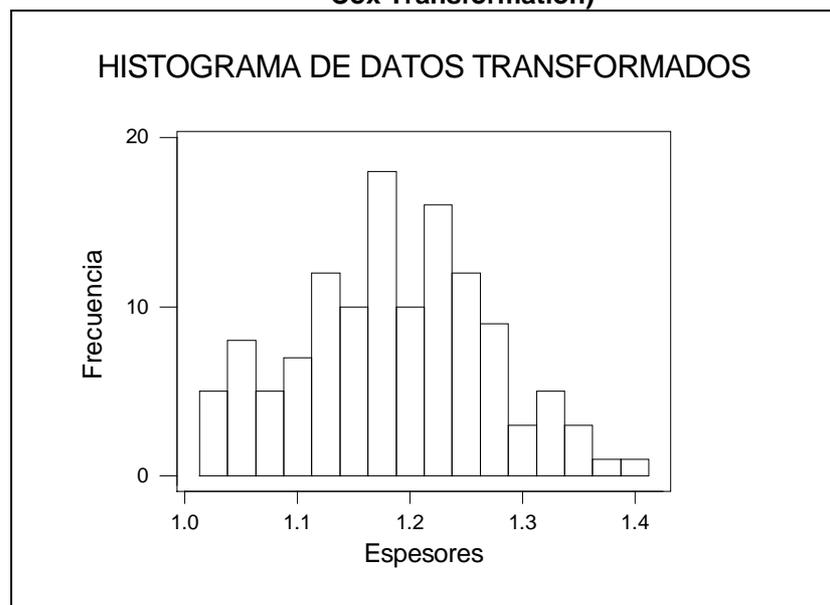


Figura 27: Histograma de los datos transformados (Graph->Histogram)

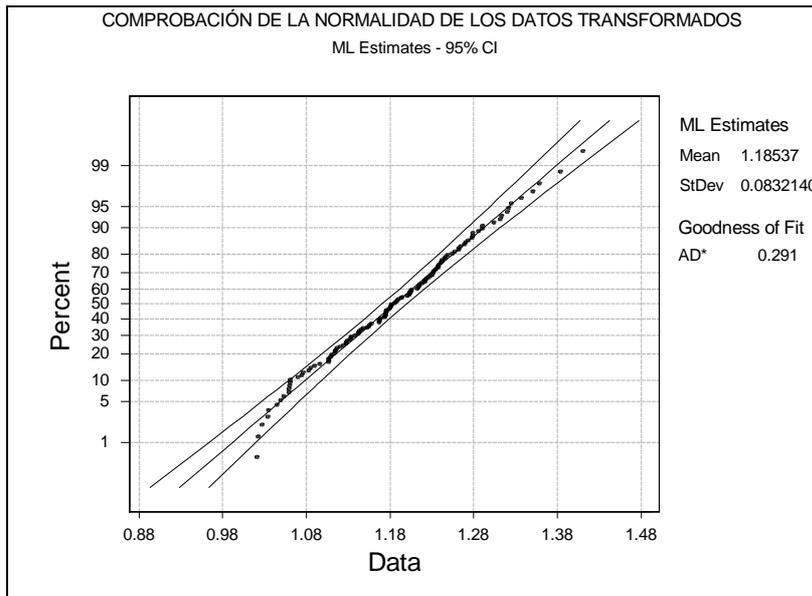


Figura 28: Comprobación de la normalidad de los datos transformados

12. GRÁFICOS DE CONTROL PARA APLICACIONES ESPECIALES

12.1. GRÁFICOS PARA MUESTRAS UNITARIAS (I-MR)

En ocasiones interesa realizar gráficos de control a valores individuales, es decir, es la particularización a muestras de tamaño = 1. Al ser la muestra unitaria no resulta posible calcular la variabilidad dentro de la misma. Para resolver esto, se hace una agrupación artificial “de cada elemento con el siguiente”, de manera que se asocia la variación entre dos unidades consecutivas a la variación intermuestral. Esta variación se estima a través del “recorrido móvil” (moving range MR), que se calcula mediante la diferencia de dos valores consecutivos.

EJEMPLO- 6: APLICACIÓN AL ANÁLISIS DE DATOS DE VISCOSIDAD DE UN PROCESO QUÍMICO

Los datos proceden del libro "Implementing Six Sigma. Smarter Solution Using Statistical Methods" de Forrest W. Breyfogle III.. Corresponden a la medida de la viscosidad en cP de 20 lotes de un compuesto químico.

APLICACIÓN MINITAB

Menú **Stat->Control Charts->I -MR**. La respuesta proporcionada por MINITAB es la indicada en la Figura 29.

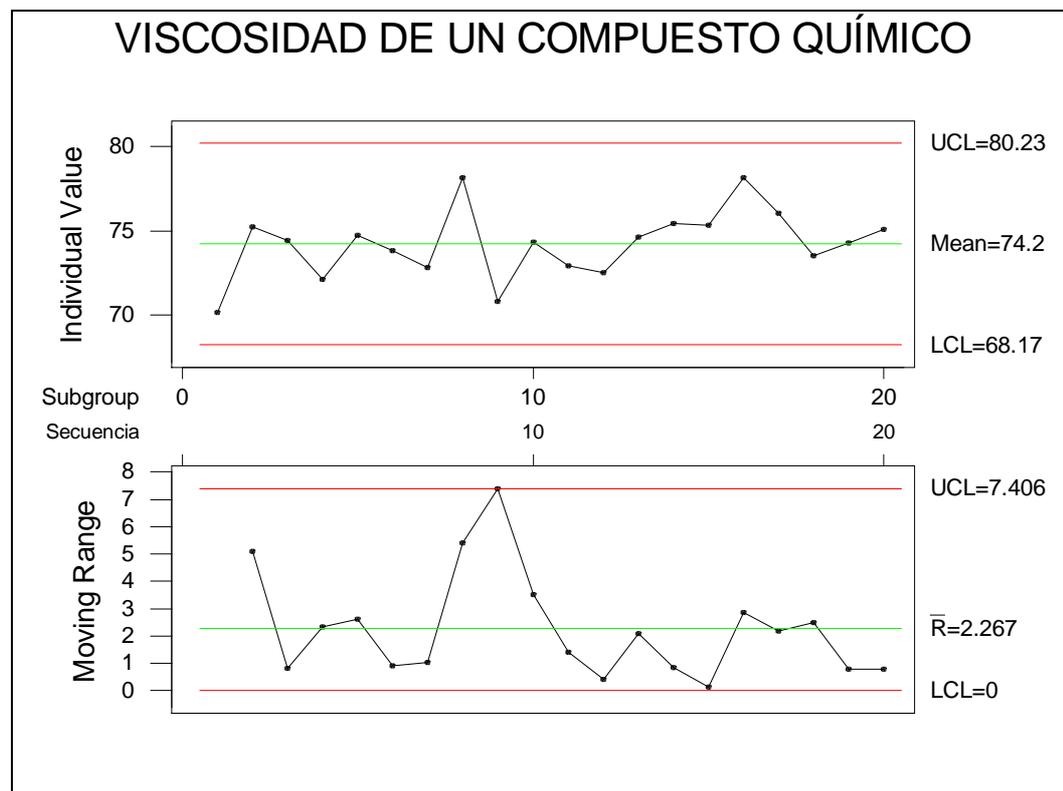


Figura 29 Gráfico I-MR de los valores de la viscosidad

12.2. GRÁFICOS QUE PERMITEN CONTROLAR DOS TIPOS DE VARIABILIDAD SIMULTÁNEAMENTE (I-MR-R/S)

En los ejemplos anteriores se intuyó la necesidad de tener que controlar tanto la variabilidad dentro del lote como la variabilidad entre lotes. Para solucionar esto se emplea el I-MR-R/S. Integra simultáneamente tres gráficos:

- Un gráfico de valores individuales, en el que se dibujan las medias muestrales y los límites de control se estiman a través de MR medio. Permite controlar el desplazamiento de la media de los lotes.
- Un gráfico de recorrido móvil en el que se dibujan los MR y los límites de control se estiman a través de MR medio. Permite controlar la variabilidad entre los lotes.
- Un gráfico R o S. Permite controlar la variabilidad dentro de los lotes.

EJEMPLO- 7: APLICACIÓN DEL GRÁFICO I-MR-R/S AL ESTUDIO DE CAPACIDAD DE PROCESOS DEL EJEMPLO 4

Como las muestras tienen tamaño 5, se puede emplear el gráfico R.

APLICACIÓN MINITAB

Menú **Stat->Control Charts->I -MR-R/S.** La respuesta proporcionada por MINITAB es la indicada en la Figura 30.

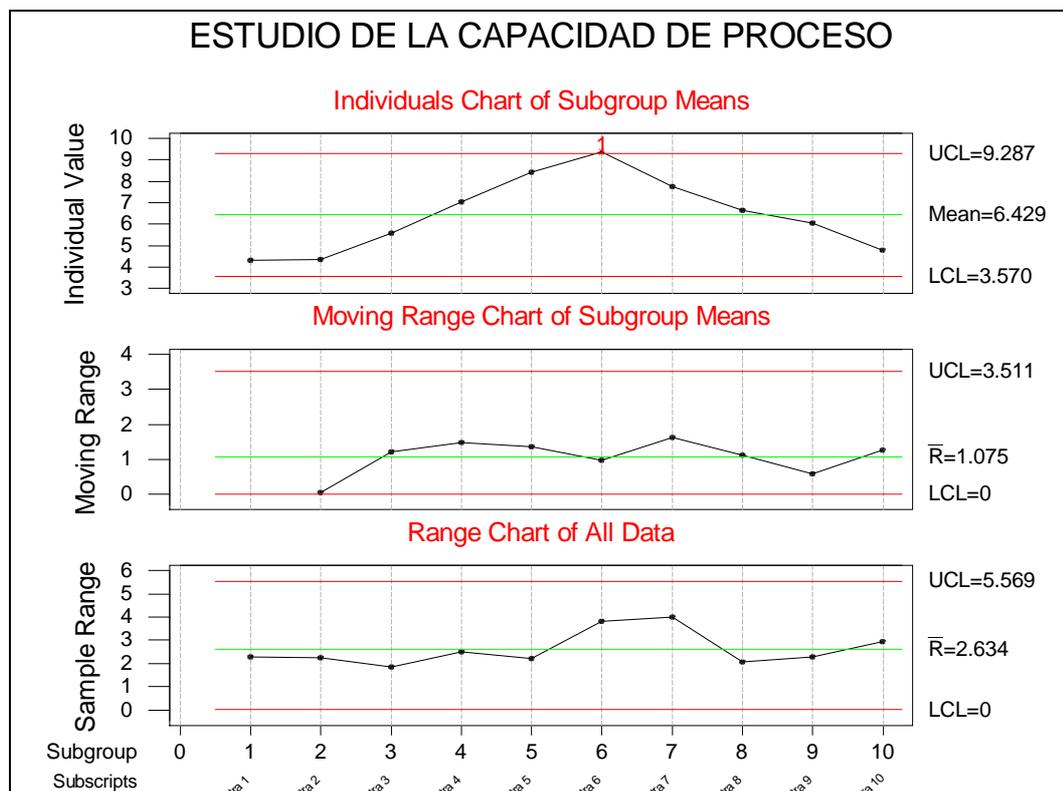


Figura 30 Gráfico I-MR-R/S del estudio de capacidad de proceso

Se puede observar que en este gráfica también se detecta el desplazamiento de la media fuera de control que se puso de manifiesto en el gráfico X-R de la Figura 22.

13. GRÁFICOS DE CONTROL PARA EL CASO DE SERIES CORTAS.

De acuerdo con lo expuesto, resulta obvio que el gráfico de control es muy útil y se aplica fácilmente al caso de la fabricación masiva de productos iguales. Sin embargo, la tendencia industrial actual es:

- Reducir al máximo el inventario de productos.
- Reducir al máximo la fabricación en curso.
- Aumentar la variedad de productos.

¿Es aplicable en estas circunstancias el gráfico de control? ¿Es útil? En estos casos se puede optar por alguna o algunas de las siguientes opciones:

- 1 Utilizar gráficos de control más sensibles (es decir que detecten antes si el proceso se sale de control), como son el CUSUM o el EWMA (véase 14).
- 2 Referir las medidas de las piezas a “desviaciones del valor nominal” de modo que resulten comparables las desviaciones producidas en piezas distintas fabricadas por la misma máquina. De este modo se puede utilizar el mismo gráfico de control para piezas distintas de la misma familia. Esta opción es recomendable siempre que se registren las circunstancias en las que se tomaron cada uno de los datos (de modo que no se violen los conceptos de “Grupos Homogéneos Racionales”) y que se puedan estratificar cuando se considere necesario realizar un estudio sobre la posible contribución de cada uno de los grupos a la variabilidad.
- 3 Empleo de Gráfico Z-MR. Este gráfico estima por separado la media de cada tipo de pieza y se representan las desviaciones con respecto a esa media. Para estimar la variabilidad existen cuatro alternativas:
 - 3.1. Considerar que la desviación típica es la misma para todas las familias de piezas. Se calcula la “S pooled” de todas ellas.
 - 3.2. La varianza es proporcional a la media. En este caso debe realizarse una transformación logarítmica de los datos para corregir esta heterocedasticidad. Una vez realizada la transformación, es análogo al caso anterior.
 - 3.3. Las piezas del mismo tipo tienen la misma variabilidad. Se calcula la “S pooled” para cada tipo de pieza.
 - 3.4. Cada fabricación tiene una variabilidad distinta. Se estima S para cada fabricación.
- 4 Estudiar la relación que existe los parámetros del proceso en lugar de a las características de calidad resultantes de las piezas fabricadas. Aplicar el gráfico de control a estos parámetros que son comunes a la fabricación de toda la familia de piezas. Esto requiere un conocimiento empírico de las relaciones existentes

entre los valores de los parámetros del proceso y los valores esperados en las características de calidad de las piezas producidas. Para alcanzar este conocimiento son muy útiles las técnicas estadísticas avanzadas (Diseño de Experimentos, etc.).

EJEMPLO- 8: APLICACIÓN DEL GRÁFICO Z-MR

Se pretende aplicar un gráfico Z-MR a la fabricación de una familia de tres tipos de piezas A, B y C. Por datos existentes, se sabe que la variabilidad de la fabricación es proporcional al espesor de la pieza.

APLICACIÓN MINITAB

Menú **Stat->Control Charts->Z-MR**. Los datos se encuentran en el fichero Ejemplo13.MTW. La respuesta proporcionada por MINITAB es la indicada en la Figura 31.

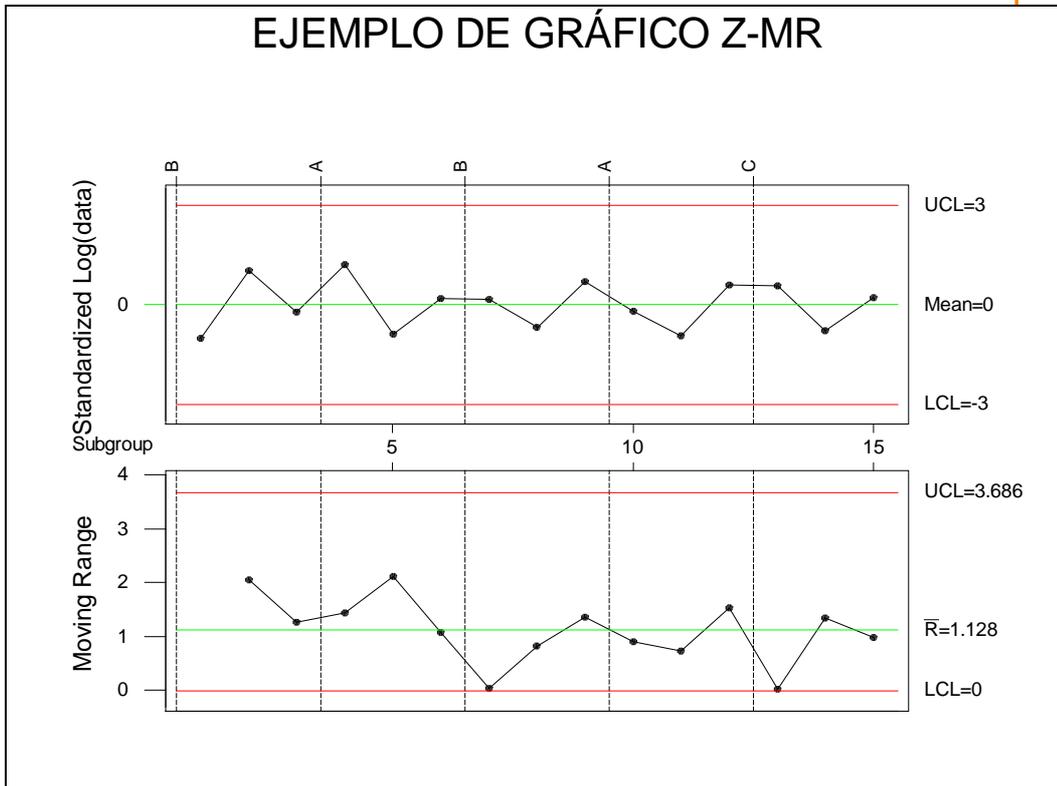


Figura 31: Aplicación de un gráfico Z-MR a una familia de piezas

14. OTROS GRÁFICOS DE CONTROL POR VARIABLES

14.1. GRÁFICO CUSUM

El gráfico CUSUM tiene la ventaja de ser más sensible a las variaciones en la media del proceso. Para que se pueda aplicar se requiere que la desviación típica del proceso sea muy estable y se disponga de una buena estimación de ella.

Si μ_0 es el valor medio supuesto al proceso, el gráfico CUSUM se basa en computar las desviaciones entre la media muestral y μ_0 acumuladas por las muestras extraídas:

$$\begin{aligned} &(\bar{x}_1 - \mu_0) \\ &(\bar{x}_1 - \mu_0) + (\bar{x}_2 - \mu_0) \\ &(\bar{x}_1 - \mu_0) + (\bar{x}_2 - \mu_0) + (\bar{x}_3 - \mu_0) \\ &\vdots \\ &(\bar{x}_1 - \mu_0) + (\bar{x}_2 - \mu_0) + (\bar{x}_3 - \mu_0) + \dots + (\bar{x}_i - \mu_0) \end{aligned}$$

Resulta intuitivo ver que mientras μ_0 no varíe las sumas acumuladas andarán oscilando entorno a 0, mientras que si μ_0 varía estas sumas crecerán rápidamente en esa dirección.

Para construir el gráfico es preciso fijar los parámetros siguientes:

- Mínima desviación d de μ_0 que se quiere detectar. Esto requiere el establecimiento de un valor de referencia k (de manera empírica se fija el valor de $k=0,5d$) de modo que se construyan dos conjuntos de sumas acumuladas:

$$CUSUM_U(0) = CUSUM_L(0) = 0$$

$$CUSUM_U(i) = \max[0, CUSUM_U(i-1) + \bar{x}_i - (\mu_0 + k)]$$

$$CUSUM_L(i) = \max[0, CUSUM_L(i-1) - \bar{x}_i + (\mu_0 - k)]$$

- Fijar un valor h , de modo que cuando las sumas acumuladas superen ese valor se concluya que la media ha superado el valor $\mu_0 \pm d$ prefijado. Obviamente la selección de este parámetro está relacionada con los riesgos que se desee correr. Lo más frecuente es seleccionar h entre 4.5σ y 5σ .

Adicionalmente se puede construir una plantilla en V, como la de la Figura 32, de modo que el punto P se coloca sobre el último punto de la serie, si con la plantilla horizontal no quedan todos los puntos dentro de la "V" debe concluirse que la media ha cambiado.

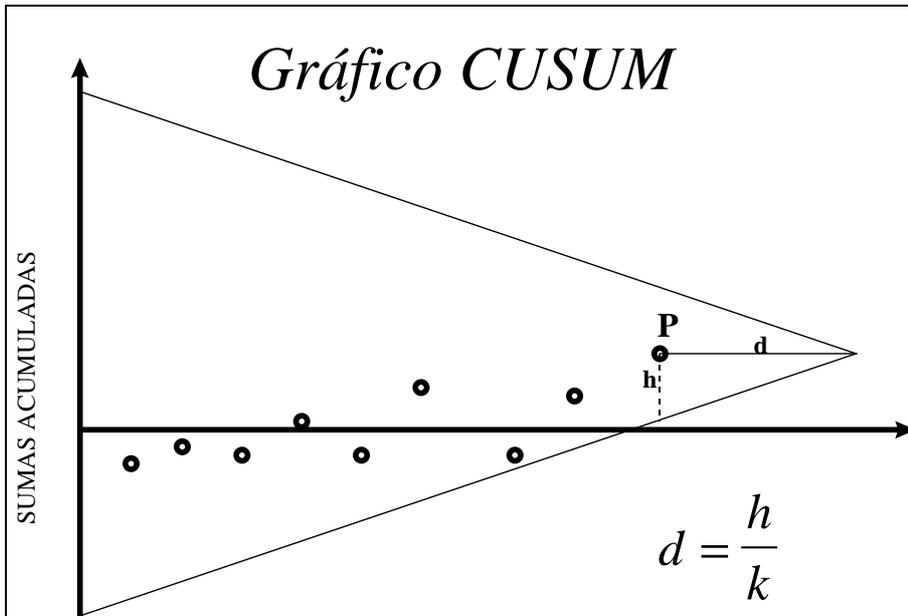


Figura 32 Máscara “V” del gráfico CUSUM

EJEMPLO- 9: APLICACIÓN DEL GRÁFICO CUSUM

Estos datos corresponden con la tabla 7.3 del libro “*Statistical Quality Control and Improvement*” de Nicholas R. Farnum. Son 75 datos de concentración de níquel tomados a lo largo de 25 días y distribuidos en 3 turnos diarios.

APLICACIÓN MINITAB

Menú **Stat->Control Charts->CUSUM**. La respuesta proporcionada por MINITAB es la indicada en la Figura 33. El valor nominal es 4.5 y se conoce que $\sigma = 0.203066$. Se ha tomado $h = 5$ y $k = 0.5$. En este gráfico puede observarse que el proceso se sale de control en la muestra número 49.

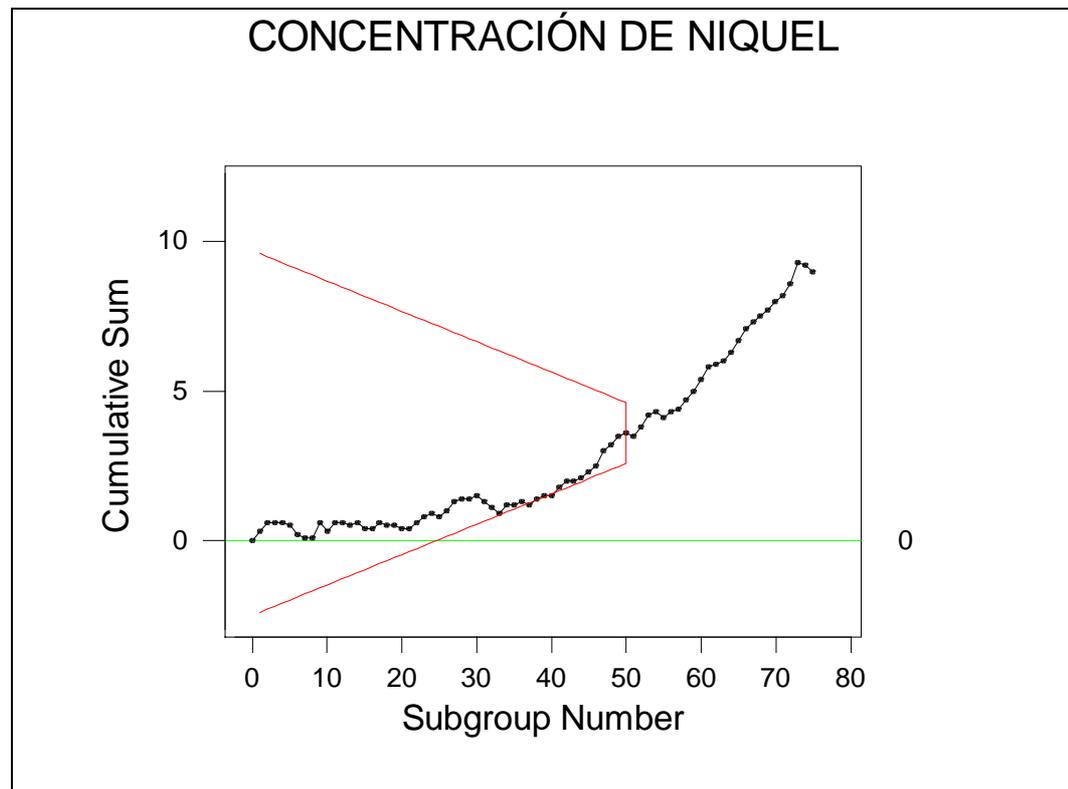


Figura 33: Ejemplo de Gráfico CUSUM

14.2. GRÁFICO EWMA

Los gráficos EWMA (exponentially weighted moving average) también tienen una sensibilidad mayor que el gráfico de Shewhart. Para que se puedan aplicar se requiere que la desviación típica del proceso sea muy estable. Su aplicación consta de los siguientes pasos:

- 1) De manera habitual se extraen k muestras y se calculan sus medias.

$$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_k,$$

- 2) Se estima la media y desviación típica del proceso a partir de los datos anteriores.

- 3) Se calculan los puntos a dibujar en el gráfico EWMA de la siguiente forma:

$$\hat{x}_i = \lambda \bar{x}_i + (1 - \lambda) \hat{x}_{i-1}$$

La aplicación de esta fórmula recurrente requiere fijar un primer valor a \hat{x}_0 (normalmente $\hat{x}_0 \equiv \bar{x}$) y al parámetro λ . Este parámetro representa el mayor o menor peso que tienen los datos anteriores. De manera empírica se le da un valor comprendido entre 0,10 y 0,30. Esta indefinición de λ es probablemente la mayor limitación del gráfico EWMA.

- 4) Se dibujan los puntos \hat{x}_i sobre el gráfico y se fijan los siguientes límites de control (son variables para cada punto).

$$LCS = \hat{x}_0 + \frac{3\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\left(\frac{\lambda}{1-\lambda}\right) [1 - (1-\lambda)^{2i}]}$$

$$LCI = \hat{x}_0 - \frac{3\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\left(\frac{\lambda}{1-\lambda}\right) [1 - (1-\lambda)^{2i}]}$$

- 5) Si alguno de los puntos queda fuera de los límites, el proceso no está en control.

EJEMPLO- 10: APLICACIÓN DEL GRÁFICO EWMA A LOS DATOS DE CONCENTRACIÓN DE NIQUEL DEL EJEMPLO 9

APLICACIÓN MINITAB

Menú **Stat->Control Charts->EWMA**. La respuesta proporcionada por MINITAB es la indicada en la Figura 34. El valor nominal es 4.5 y se conoce que $\sigma = 0.203066$ y se toma $\lambda = 0.2$. En el gráfico puede apreciarse que el proceso está fuera de control antes de la muestra número 50.

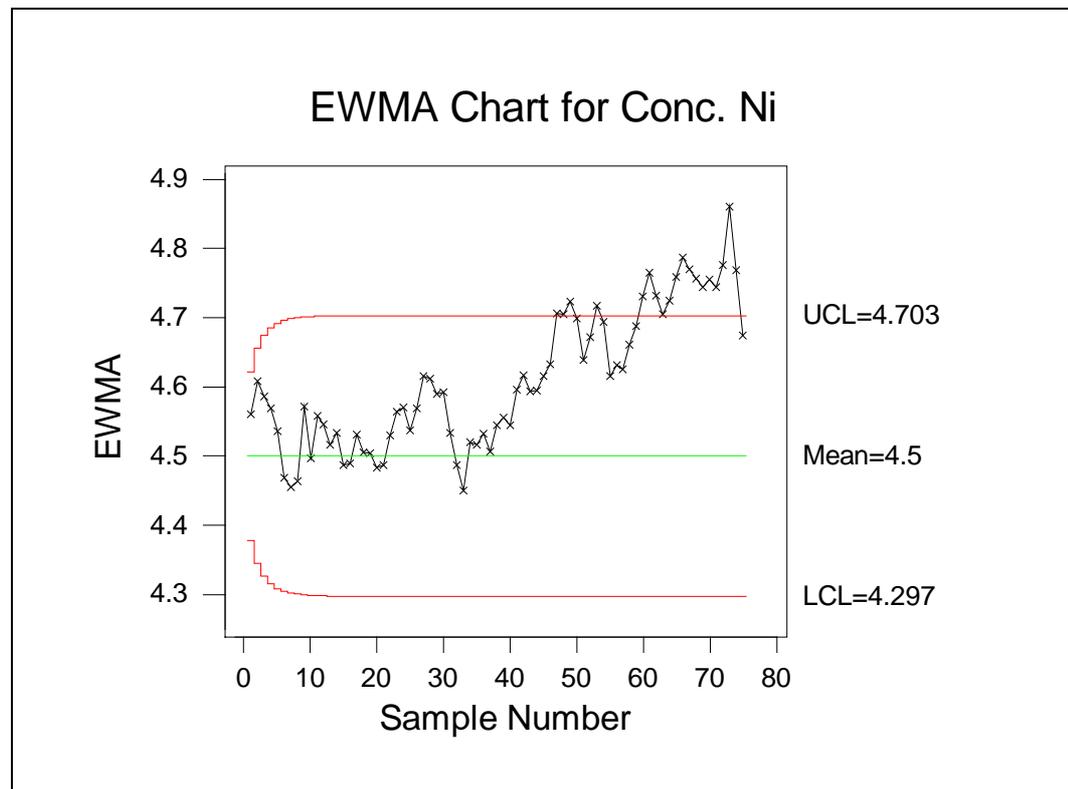


Figura 34: Ejemplo de Gráfico EWMA

15. GRÁFICOS DE CONTROL POR ATRIBUTOS

Las ideas sobre las que se fundamenta el *Control Estadístico de Procesos* se pueden extender al control de características de calidad de tipo atributo o discreto. Como se recordará, las primeras se rigen por la distribución binomial y las segundas por la de Poisson.

15.1. GRÁFICOS DE CONTROL BASADOS EN LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

Como se recordará si x es una variable aleatoria binomial $B(n,p)$, $E(x) = np$ y $\sigma_x^2 = npq$. Además se verifica que:

$$\text{Si } npq > 5 \text{ entonces } B(n,p) \rightarrow N(np, \sqrt{npq})$$

Dentro de este grupo existen dos gráficos fundamentales:

a) **Gráfico np**

Sirve para controlar el número de unidades defectuosas en la muestra. Los límites de control son:

$$LCS = n\bar{p} + 3\sqrt{n\bar{p}(1-\bar{p})}$$

$$LC = n\bar{p}$$

$$LCI = n\bar{p} - 3\sqrt{n\bar{p}(1-\bar{p})}$$

donde \bar{p} es la fracción defectuosa media. Dado que lo normal es que \bar{p} sea un valor muy bajo, los tamaños de muestra requeridos son muy altos. Por esta razón se aplican frecuentemente al análisis de datos de inspecciones 100%. Si el valor calculado para el LCI , se toma 0.

b) **Gráfico p**

Sirve para controlar la fracción defectuosa. Los límites de control son:

$$LCS = \bar{p} + 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}$$

$$LC = \bar{p}$$

$$LCI = \bar{p} - 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}$$

Si el valor calculado para el LCI , se toma 0.

EJEMPLO- 11: APLICACIÓN A UN GRÁFICO P

Un fabricante de productos electrónicos dispone de un proceso de soldadura de componentes por ola de estaño. La tabla siguiente recoge los resultados de la producción de los últimos 30 días. Analice este proceso.

DÍA	RECHAZOS	PROBADOS
1	14	286
2	22	281
3	9	310
4	19	313
5	21	293
6	18	305
7	16	322
8	16	316
9	21	293
10	14	287
11	15	307
12	16	328
13	21	296
14	9	296
15	25	317
16	15	297
17	14	283
18	13	321
19	10	317
20	21	307
21	19	317
22	23	323
23	15	304
24	12	304
25	19	324
26	17	289
27	15	299
28	13	318
29	19	313
30	12	289

Tabla 9

SOLUCIÓN:

Disponiendo los cálculos en forma tabular para un gráfico tipo "p".

Control Estadístico de Procesos

DÍA	RECHAZOS	PROBADOS	FRACCIÓN	LCS	LCI
1	14	286	0,049	0,094	0,014
2	22	281	0,078	0,094	0,013
3	9	310	0,029	0,092	0,015
4	19	313	0,061	0,092	0,016
5	21	293	0,072	0,093	0,014
6	18	305	0,059	0,093	0,015
7	16	322	0,050	0,092	0,016
8	16	316	0,051	0,092	0,016
9	21	293	0,072	0,093	0,014
10	14	287	0,049	0,094	0,014
11	15	307	0,049	0,093	0,015
12	16	328	0,049	0,091	0,017
13	21	296	0,071	0,093	0,015
14	9	296	0,030	0,093	0,015
15	25	317	0,079	0,092	0,016
16	15	297	0,051	0,093	0,015
17	14	283	0,049	0,094	0,014
18	13	321	0,040	0,092	0,016
19	10	317	0,032	0,092	0,016
20	21	307	0,068	0,093	0,015
21	19	317	0,060	0,092	0,016
22	23	323	0,071	0,092	0,016
23	15	304	0,049	0,093	0,015
24	12	304	0,039	0,093	0,015
25	19	324	0,059	0,092	0,016
26	17	289	0,059	0,094	0,014
27	15	299	0,050	0,093	0,015
28	13	318	0,041	0,092	0,016
29	19	313	0,061	0,092	0,016
30	12	289	0,042	0,094	0,014
		Media=	0,054		

Tabla 10

Obsérvese que los límites de control no son constantes.

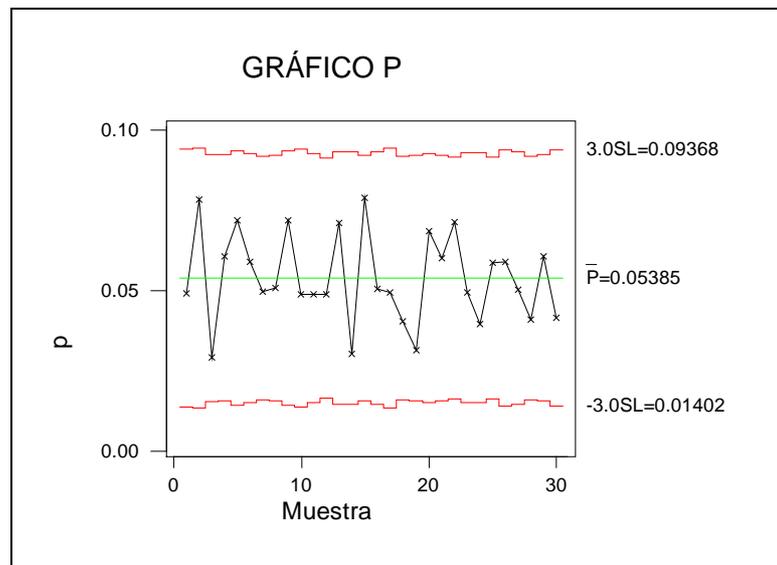


Figura 35: Gráfico por atributos tipo p.

15.2. GRÁFICOS DE CONTROL BASADOS EN LA DISTRIBUCIÓN DE POISSON

Si x es una v.a de Poisson de constante μ , $E(x) = \mu$ y $\sigma_x^2 = \mu$. Además se verifica que Si $\mu > 5$ entonces $P(\mu) \rightarrow N(\mu, \sqrt{\mu})$. Dentro de este grupo existen dos gráficos fundamentales:

a) Gráfico c

Sirve para controlar el número de defectos en la unidad de producto o en una muestra de tamaño preestablecido. Los límites de control son:

$$LCS = \bar{c} + 3\sqrt{\bar{c}}$$

$$LC = \bar{c}$$

$$LCI = \bar{c} - 3\sqrt{\bar{c}}$$

Si el valor calculado para el LCI , se toma 0.

a) Gráfico u

Sirve para controlar el número de medio de defectos en una muestra de tamaño n (por ej. número de unidades inspeccionadas, longitud o superficie de producto, etc.). Los límites de control son:

$$LCS = \bar{u} + 3\sqrt{\frac{\bar{u}}{n}}$$

$$LC = \bar{u}$$

$$LCI = \bar{u} - 3\sqrt{\frac{\bar{u}}{n}}$$

Si el valor calculado para el LCI , se toma 0.

Puesto que $c = un$, $\sigma_u = \frac{\sigma_c}{|n|} = \frac{\sqrt{c}}{|n|} = \frac{\sqrt{un}}{|n|} = \sqrt{\frac{u}{n}}$

EJEMPLO- 12: APLICACIÓN A UN GRÁFICO TIPO C

Una empresa de desarrollos de SW ha registrado las siguientes tasas de error (medidas en errores por 1000 líneas de código) en los últimos 30 días. Analice el proceso de desarrollo de SW.

DÍA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
ERR.	6	7	7	6	8	6	5	8	1	6	2	5	5	4	3
DÍA	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
ERR.	3	2	0	0	1	2	5	1	7	7	1	5	5	8	8

Tabla 11

SOLUCIÓN:

Los límites de control y línea central para un gráfico tipo c son:

$$LCS = 4.467 + 3\sqrt{4.467} = 10.807$$

$$LC = 4.467$$

$$LCI = 0$$

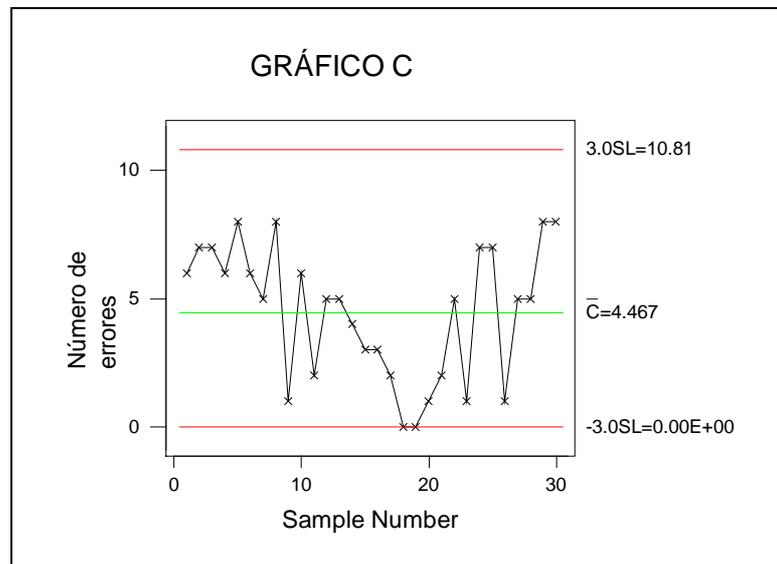


Figura 36: Gráfico por atributos tipo c

16. IMPLANTACIÓN DEL SPC EN UNA EMPRESA

Una vez tomada la decisión de implantar SPC por la gerencia de la empresa, es conveniente trazar un plan de implantación de acuerdo con las siguientes fases:

16.1. FASE 1: PREPARACIÓN Y SELECCIÓN DEL PROCESO PILOTO

En esta etapa es necesario nombrar un grupo de trabajo interdisciplinar que afronte este trabajo. Se deben realizar las siguientes tareas:

- Preparar un diagrama de flujo del producto desde la entrada de materia prima hasta la entrega del producto al cliente.
- Sobre el diagrama anterior seleccionar aquellos procesos que resulten críticos (están dando problemas en la

actualidad) y que por otra parte se tenga un conocimiento suficiente del mismo como para poder alcanzar un éxito en poco tiempo. Para la selección del proceso piloto e identificación de la característica a controlar pueden ser útiles las herramientas de Ishikawa.

- Planificación de la formación del personal en SPC.

16.2. FASE 2: IMPLANTACIÓN DEL GRÁFICO DE CONTROL PILOTO

- Definición de la característica de calidad a controlar.
- Selección del tipo de gráfico a utilizar.
- Definición del procedimiento de toma de muestras (consecutivas o distribuidas a lo largo del intervalo).
- Definición del tamaño de muestras. Para gráficos de control por variables se suele tomar $n = 5$ si la distribución del proceso es sensiblemente normal. Si no es normal, es preciso aumentar n para normalizar la distribución de las medias muestrales.
- Definición de la periodicidad de toma de muestras. Será más frecuente cuanto menor sea C_{pk} , más inestable sea el proceso y mayor sea el coste del producto.
- Definición del procedimiento de medición y equipo necesario.
- Definición del sistema de recogida de datos y preparación del gráfico.
- Formación del personal afectado en SPC y en la medición.
- Puesta en marcha del gráfico de control. y estudio de la capacidad de máquina y proceso.
- Eliminación de causas asignables presentes.

16.3. FASE 3: ANÁLISIS DE LOS PRIMEROS RESULTADOS

Tan pronto como se empiecen a recoger los primeros resultados, es conveniente realizar un análisis de la experiencia acumulada por si fuera necesario redefinir el plan trazado (el proceso seleccionado no es adecuado, la variable controlada tiene una incidencia real baja, la formación dada al personal no ha sido suficiente, etc.)

16.4. FASE 4: EXTENSIÓN A OTROS PROCESOS

Una vez conseguido el control estadístico del proceso, debe:

- **Evaluarse los resultados conseguidos, comunicándolos a la gerencia (para que autorice la extensión del programa), a los que han participado en este programa piloto (para su propio estímulo) y a aquellas personas que están involucradas con los próximos procesos sobre los que se va a implantar el SPC (para conseguir su apoyo de antemano).**
- **El proceso controlado debe entrar en una fase de mejora continua para reducir la variabilidad debidas a las causas comunes. Esto puede ser objeto de otro programa de mejora.**

Selección de los procesos sobre los que se seguirá la implantación. Repetir el ciclo

ACTIVIDAD 1:

Realice los ejercicios incluidos en el documentos Ejercicios de Control Estadístico de Procesos

Tiempo estimado de desarrollo: Cada ejercicio debe resolverse en un tiempo que oscila entre 15 y 30 minutos.

Recurso(s) Utilizado(s): EXCEL, MINITAB O CENTURION

A quién debe enviarse la actividad: En caso de dificultad, comentarse en el foro

Formato de envío: Ficheros de EXCEL, MINITAB o CENTURION

Extensión: La menor posible

Respuesta del tutor: Foro y coloquio en clase.

Responde brevemente a la siguiente pregunta:

¿Qué nuevas posibilidades ves en los métodos estadísticos en la mejora de la calidad?

RESUMEN

- a) Las causas de variabilidad de un proceso se clasifican en “*comunes*” y en “*especiales*” o “*asignables*”.
- b) Las causas “*comunes*” son muchas y de poca importancia relativa. Son responsables de la variabilidad natural del proceso.
- c) Las causas “*especiales*” o “*asignables*” tiene una influencia mayor en la variabilidad del proceso.
- d) Un proceso está en control estadístico cuando no está afectado por causas “*especiales*” o “*asignables*”.
- e) Los gráficos de control sirven para detectar la presencia de causas “*especiales*” o “*asignables*”.