Sobre la Determinacion del Tamaño de Muestra Optimo

Jorge Luis Romeu, Ph.D.
ASQ CRE/CQE Senior Member
Past Director, Region II (NY & PA)
Currently Chair, North East Quality Councils/NEQC
Proyecto de Educacion Internacional Juarez-Lincoln-Marti
Email: romeu@cortland.edu
Web: http://www.linkedin.com/pub/jorge-luis-romeu/26/566/104

ASQ Reliability Division Webinar: February 22, 2017

Sumario de la Charla

- Introduccion
- Tamaño de muestra para Estimacion por Intervalos:
  - Para la Media de la Normal y para Proporciones
- Tamaño de muestra para la media Exponencial
- Tamaño de muestra para la media de Weibull
- Tamaño de muestra para el caso No Parametrico
- Tamaños de muestra utilizando el SW Minitab.
- Proyecto Juarez Lincoln Marti de Educacion Int'l
  http://web.cortland.edu/matresearch
- INSTITUTO DE ESTADISTICA APLICADA Y MEJORA CONTINUA
  - http://web.cortland.edu/matresearch/QR&CIInstPg.htm
- Lecturas Adicionales

Origen de esta Presentacion

- La pregunta mas frecuente que recibe el RAC (Reliability Analysis Center) o el RAC Forum es como calcular el tamaño de muestra optimo “n” requerido para estimacion o experimentacion.
- Como sacar la muestra para estimar, o hacer una prueba de hipotesis, de medidas de rendimiento (MR) tales como confiabilidad, MTTF, etc.
- La importancia de estos calculos proviene de que, el tamaño de muestra, determina el tiempo y el dinero dedicado a tal actividad de muestreo.

El Tamaño de Muestra Depende de:

- La Distribucion Estadistica:
  - Normal, Exponential, Weibull, etc.
- La Variabilidad de los datos:
  - Mas variable => mas datos
- El Nivel de Confianza requerido:
  - Mayor confianza => mas datos
- La Precision requerida:
  - Mayor Precision => mas datos

Intervalo de Confianza (I.C.)

- Para la media muestral de la Normal

$$\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \bar{x} \pm H$$

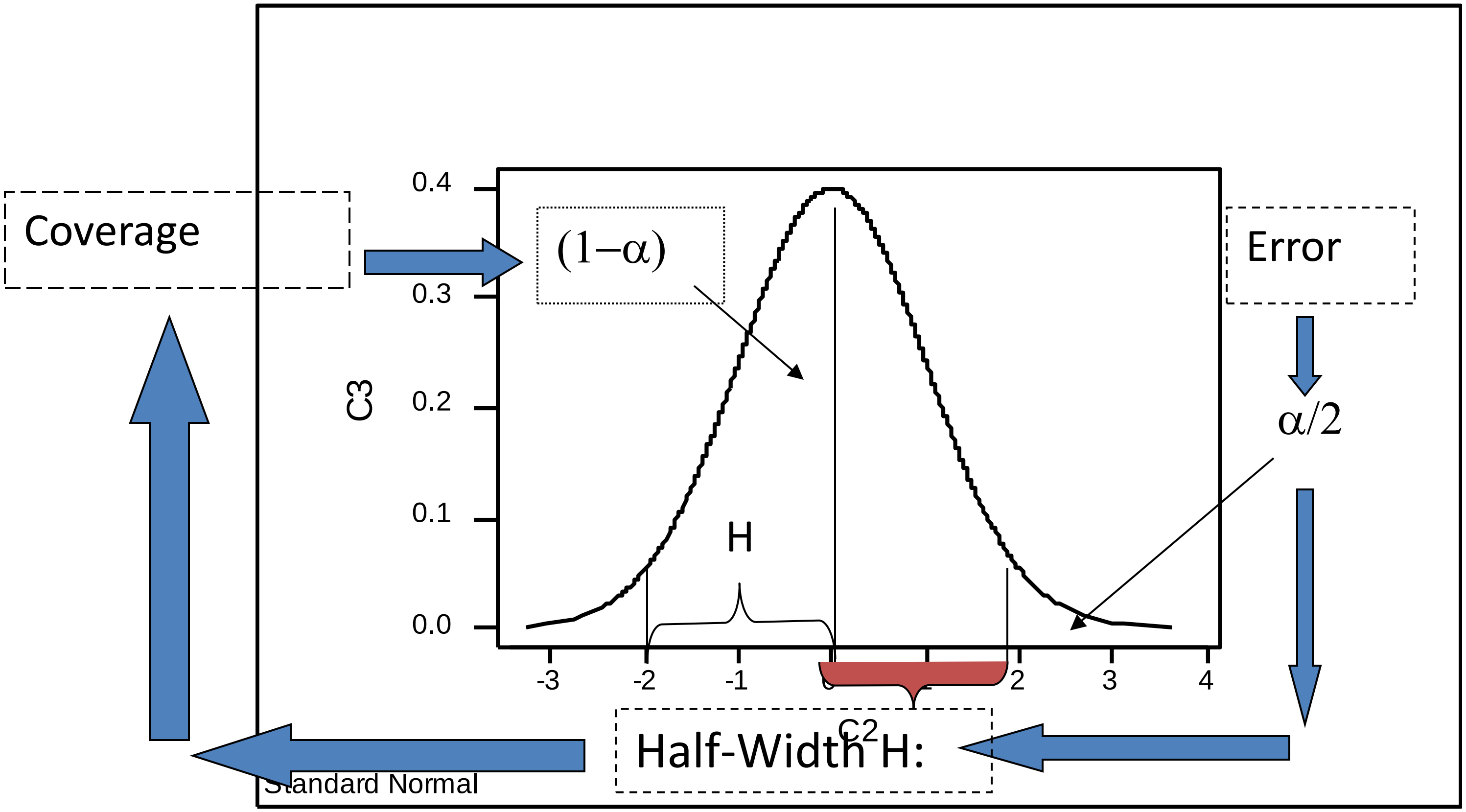
- H es la Amplitud del Semi Intervalo
- “n” es el tamaño de la muestra
- Z y Sigma son el percentil y la desv. Estandard
  - De la distribucion Normal

Interpretacion del I.C.:

- **Con Probabilidad (o Confianza)** $(1-\alpha)$
  - La **Media Muestral** $\bar{x}$ se encontrara,
  - No mas de una distancia **H** de la media μ
  - Al menos 100 $(1-\alpha)$ % de las veces
- Esto se denota, estadisticamente:

$$P\{\mu - H \leq \bar{x} \leq \mu + H\} = 1 - \alpha$$

Relacion entre H y Error α



Calculo del Tamaño de Muestra:

$$z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = H \Rightarrow n = \frac{\left(z_{\alpha/2}\right)^2 \sigma^2}{H^2}$$

<u>Ejemplo</u>: calcular un intervalo de confianza (IC) del 95% para la media muestral de una distribucion Normal, con desviación standard σ = 8.6 y una precisión H = 2:

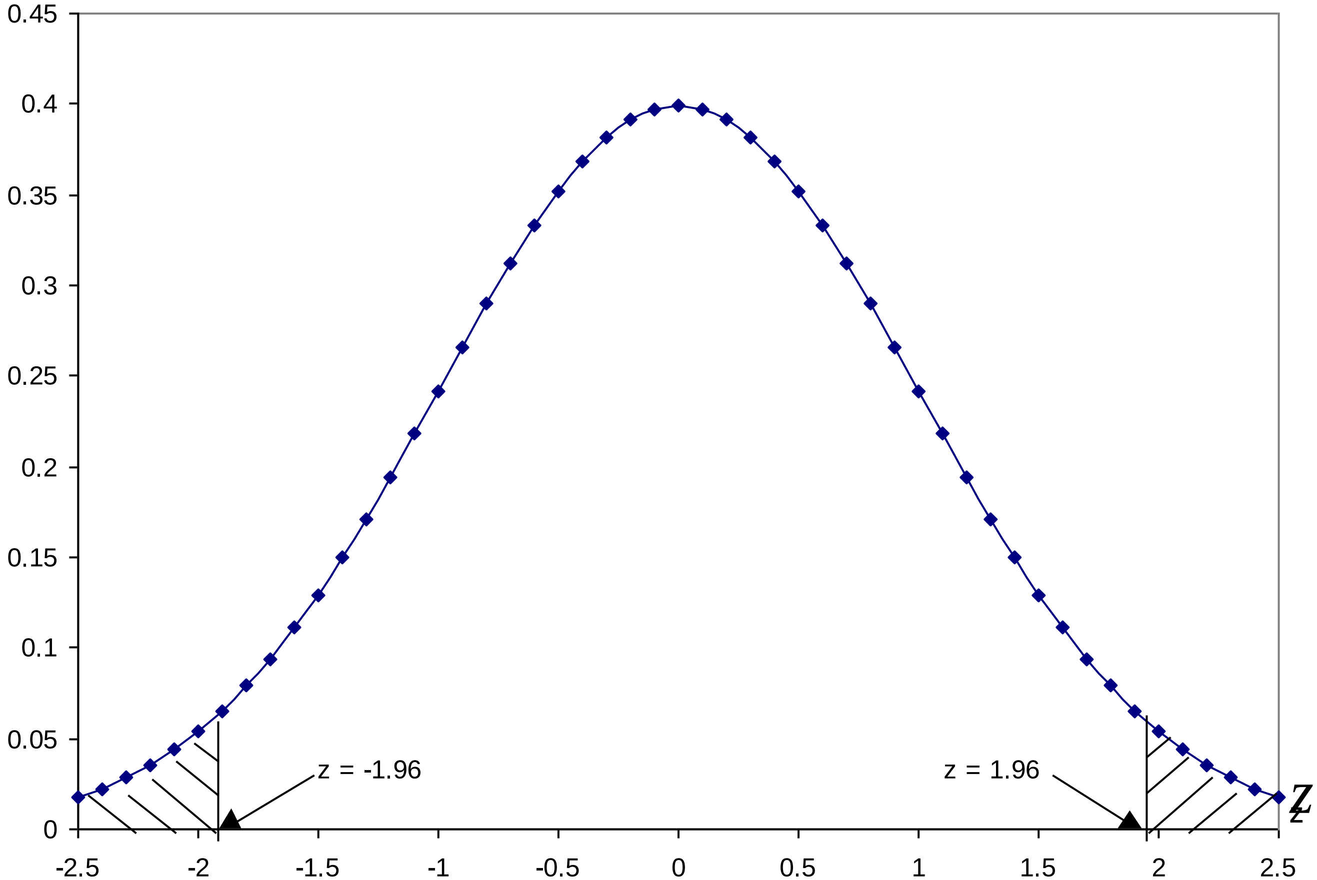
$$n = \frac{1.96^2 * 8.6^2}{2^2} = 71.03 \approx 72\,\text{observations}$$

Prueba de Hipotesis y Errores

- H_0 : Hipotesis nula (status quo)
- H_1 : Hipotesis alternativa (negacion de Ho)
- Error de Tipo I: se comete al decidir que la hipotesis alternativa (H_1) es cierta, cuando en realidad la hipotesis nula (H_0) es cierta
- Error de Tipo II: se comete al decidir que la hipotesis nula (H_0) es cierta, cuando en realidad la hipotesis alternativa (H_1) es cierta.

Prueba para la Media

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \ \text{ vs. } H_1 : \mu \geq \mu_0$$

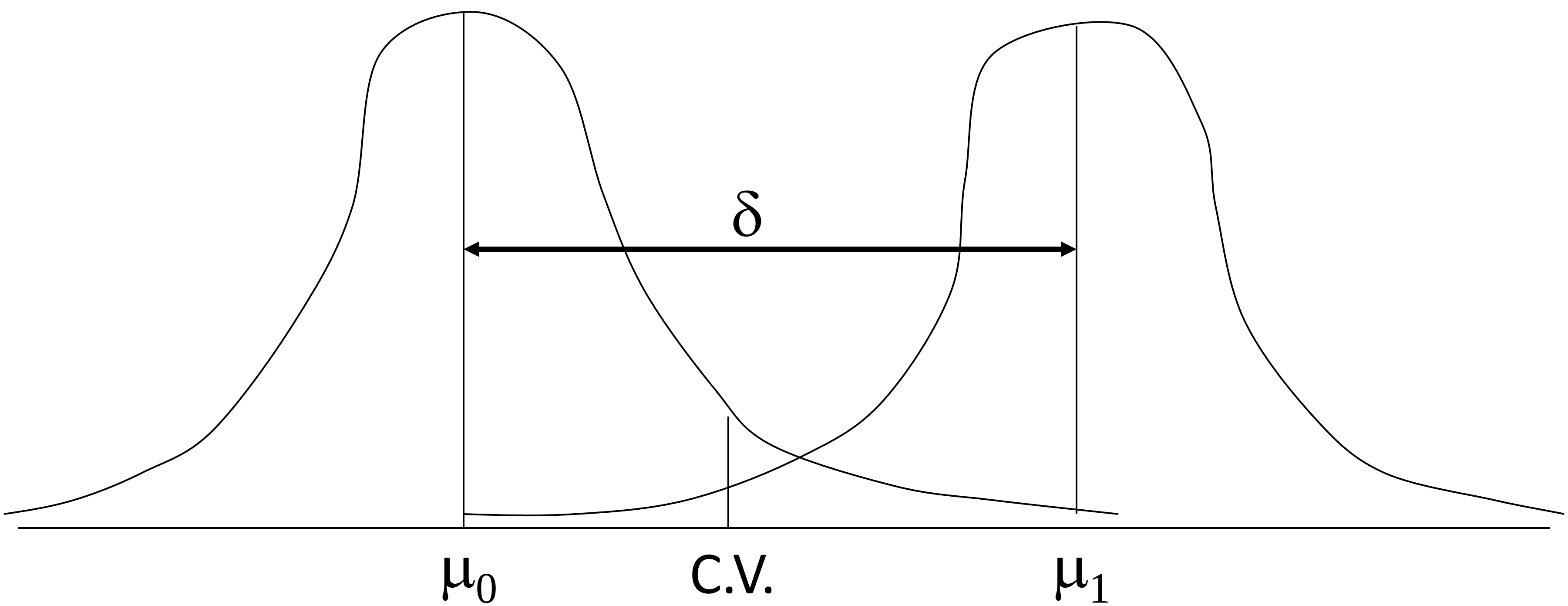


$$z = \frac{(\bar{x} - \mu)}{\sigma / \sqrt{n}}$$

Potencia de la Prueba:

$H_0 : \mu \leq \mu_0$

Potencia = 1 - β = P $\{H_1 \mid H_1\}$



Calculo del Tamaño de Muestra

$$n = \frac{\left(z_\alpha + z_\beta\right)^2 \left(\sigma^2\right)}{\delta^2}$$

Para α=0.05, β=0.1, z_α=1.65; z_β =1.28 and δ = 1/2 σ :

$$n = \frac{\left(z_\alpha + z_\beta\right)^2 \left(\sigma^2\right)}{\delta^2} = \frac{(1.65+1.28)^2 \times \sigma^2}{\left(\sigma / 2\right)^2} = 34.4$$

I.C. para la Proporcion p

- Para la Proporcion "p" de items defectuosos:

$$\overline{p} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}} = \overline{p} \pm H$$

- H es la Amplitud del Semi Intervalo
- "n" es el tamaño de la muestra
- Z el percentil de la distribucion Normal
- P la proporcion estimada de items defectuosos

Calculo del Tamaño de Muestra:

$$z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}}=H \Rightarrow n = z^{2}_{\alpha/2}\,\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{H^{2}}$$

<u>Ejemplo</u>: calcular un intervalo de confianza (IC) del 80% para una proporcion estimada de items defectuosos de 5%, en un lote dado, donde H es la precisión (distancia a la verdadera p) deseada, de a lo mas un 3%: H = 0.03:

$n = (z_{\alpha/2} / H)^2 \times p(1-p) = [(1.28/0.03)^2]*0.05*0.95 = 86.47 \approx 87$

El procedimiento es valido cuando $n \times p > 5$ y $n \times (1-p) > 5$

I.C. para la Confiabilidad R

- Considera la Proporcion "p" en que {X<T}:

$$\overline{p} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}} = \overline{p} \pm H$$

- p = (1 - R) donde R es la confiabilidad: P{X>T}
- "n" es el tamaño de la muestra
- Z el percentil de la distribucion Normal
- T es el tiempo de Mision; X es la "vida" del item

Tamaño de Muestra para I.C. de R:

<u>Ejemplo</u>: Estimemos el tamaño de muestra "n" necesario para obtener un I.C. para la confiabilidad (R) de un item, cuyo tiempo de mision es T_0. Supongamos que $P\{X>T_0\}$ la confiabilidad "R" sea cercana a 0.95. Supongamos que, con una confianza del 80%, deseamos que la estimación de la confiabilidad R se encuentre, a lo sumo, a un 3% de la confiabilidad real (y desconocida). Entonces, precisión H = 0.03 y p = (1-R) = 0.05. Y los cálculos del I.C. son los mismos que para el I.C. de la proporción.

$$\mathbf{n = (z_{\alpha/2} / H)^2 \times R(1-R) = [(1.28/0.03)^2]*0.95*0.05 = 86.47 \approx 87}$$

- I.C. de la Media de la Distribution Exponencial:

Sabemos que si “n” items tienen “vidas” denotadas X_i, i = 1, … , n, distribuidas Exponencial con media MTTF = μ, el estadístico 2T/μ (donde T = Σ X_i es la suma total de las ‘n’ vidas) se distribuye como una Chi Cuadrada con DF = 2n ‘grados de libertad’. Entonces, el I.C. 100(1-α)%, e.g. 95%, para MTTF = μ

$$\left(\frac{2T}{\mathrm{X}^2_{2n,1-\alpha/2}} ; \frac{2T}{\mathrm{X}^2_{2n;\alpha/2}} \right)$$

La distancia maxima o precision Ƭ, del estimador a la media μ se obtiene:

$$\tau = \frac{\mu - \dfrac{2T}{X^2_{\alpha/2;2n}}}{\mu}; or; \tau = \frac{\dfrac{2T}{X^2_{1-\alpha/2;2n}} - \mu}{\mu}$$

‘T’ es el tiempo total de la vida de los ‘n’ items
“n” es el tamaño de la muestra
X^2_v Percentil Chi Cuadrado con “v” grados de libertad y confianza “1-α”

Calculo del Tamaño de Muestra:

$$\tau = \frac{C-D}{C+D} \Rightarrow \frac{C}{D} = \frac{X^2_{\alpha/2;2n}}{X^2_{1-\alpha/2;2n}} = \frac{1+\tau}{1-\tau}$$

Donde denote C = $X^2_{\alpha/2;2n}$ y D = $X^2_{(1-\alpha)/2;2n}$. La ecuacion se resuelve inspeccionando la Tabla Chi Cuadrado, y encontrando en ella dos valores que obtengan dicha razón, para una confianza (1-α) y una precision τ, Entonces, tomamos de ellos los grados de libertad correspondientes: 2n => “n” es la mitad.

Por ejemplo “n” para un I.C. del 90% para el MTTF, con una precision del 45%, se obtiene usando 1-α = 0.9, α = 0.1, $\alpha/2$ = 0.05, τ = 0.45 y razon C/D :

$$\frac{C}{D} = \frac{\mathrm{X}^2_{0.95;24}}{\mathrm{X}^2_{0.05;24}} = \frac{36.415}{13.848} = 2.62$$

$$2.62 \cong \frac{1+0.45}{1-0.45} = \frac{1.45}{0.55} = 2.636;$$

$$\mathrm{Re}\, sultado : 2n = 24 \Rightarrow n = 12$$

$$\mathrm{Re}\, considerar\ : Tau = 0.2$$

Recalculamos "n" para I.C. MTTF del 90%, ahora con una precision del 20%: 1-α = 0.9, α = 0.1, α/2 = 0.05, τ = 0.20. La razon C/D es ahora:

$$\mathrm{Re}\,calculando : \tau = 0.2$$

$$\frac{C}{D} = \frac{\mathrm{X}^2_{0.95;130}}{\mathrm{X}^2_{0.05;130}} = \frac{157.6}{104.7} = 1.5$$

$$1.5 \cong \frac{1+0.2}{1-0.2} = \frac{1.2}{0.8} = 1.5;$$

$$\mathrm{Re}\,sultado : 2n = 130 \Rightarrow n = 65$$

$$Tamano = 65$$

Cuando el tamano de muestra es grande (n>30) podemos usar la aproximacion Normal a la distribución Chi Cuadrada:

$$z = \sqrt{(2X^2_n)} - \sqrt{(2n - 1)}$$

Y con algunos cambios algebraicos:

$$\frac{\left(\sqrt{4n-1}+z_{\alpha/2}\right)^2}{\left(\sqrt{4n-1}-z_{\alpha/2}\right)^2}=\frac{1+\tau}{1-\tau}\Rightarrow$$

$$n=\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{2}\right)z^2_{\alpha/2}\left[\frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{\tau}+\sqrt{\frac{1}{\tau^2}-1}\right)-\frac{1}{2}\right]$$

Por ejemplo, recalculamos el I.C. del 90% para el MTTF:
Precision 20%: 1-α = 0.90, α = 0.1, α/2 = 0.05, τ = 0.2.

$$n = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2}\right) z_{0.05}^{2} \left[\frac{1}{0.2} \left(\frac{1}{0.2} + \sqrt{\frac{1}{0.2^{2}} - 1} \right) - \frac{1}{2} \right]$$

$$= 0.25 + \frac{1.65^{2}}{2} \left(\frac{5 + \sqrt{25 - 1}}{0.2} \right) - 0.5$$

$$= 0.25 + ((1.65*1.65)/2)*((1/0.2)*((1/0.2) +$$

$$(\mathrm{sqrt}((1/(0.2**2)) - 1)) - 0.5)) = 64.3 \approx 65$$

Problemas de Estimacion del Tamaño de Muestra para una Prueba de Hipotesis de la Media de una Distribucion Weibull

Distribucion y Densidad:

$$F(x) = 1 - \exp\{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta}\} \qquad f(x) = \frac{\beta}{\eta^{\beta}} x^{\beta-1} \exp\{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta}\}$$

Media y Confiabilidad:

$$m = \eta \times \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) \qquad R(x) = P\{X \geq x\} = Exp\{-(x/\eta)^{\beta}\}$$

Deseamos obtener el tamaño de muestra “n” para una Prueba de Hipótesis de la Media “m” de la Distribución Weibull, cuando el parámetro β es conocido y los Errores de Tipo I y II, la Confiabilidad R, y la misión T son dadas:

Consideremos la variable "numero de fallas en el tiempo T" y denotemosla como "x". Podemos aproximarla mediante una Binomial (n,p) donde "n" es el numero de elementos en la prueba (tamaño de la muestra) y "p" es la probabilidad de que un elemento falle la prueba (muera antes de "T")

$$p = F(T) = 1 - R(T) = 1 - Exp\{-(T/\eta)^{\beta}\}$$

Hipotesis H_i: m = m_i para i = 0,1 => Hipotesis H_i: p = p_i para i = 0,1;

$$p_i = 1 - Exp\left\{-\left(\frac{T}{m_i}\right)^{\beta} \times \left(\Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right)\right)^{\beta}\right\}; i = 0,1$$

Estableciendo dos ecuaciones Binomiales para los errores de Tipo I y II:

$$\sum_{x=0}^{c} C_x^n p_0^x (1-p_0)^{n-x} = 1-\alpha; and: \sum_{x=0}^{c} C_x^n p_1^x (1-p_1)^{n-x} = \beta^*$$

<u>Ejemplo</u>: encontrar la muestra requerida para la Prueba de la media "m" de vida de 5000 horas vs. 1000 horas, segun una Weibull, cuando el tiempo de prueba T – 500 horas; los riesgos α y β* son de 0.01, y el parametro β = 2.

$$p_0 = 1 - Exp\left\{ -\left(\frac{T}{m_0}\right)^{\beta} \times \left(\Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right)\right)^{\beta} \right\}$$

$$= 1 - Exp\left\{ -\left(\frac{500}{5000}\right)^{2} \times \left(\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)\right)^{2} \right\} = 1 - 0.9922$$

$$p_1 = 1 - Exp\left\{ -\left(\frac{T}{m_1}\right)^{\beta} \times \left(\Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right)\right)^{\beta} \right\}$$

$$= 1 - Exp\left\{ -\left(\frac{500}{1000}\right)^{2} \times \left(\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)\right)^{2} \right\} = 1 - 0.8217$$

Las dos ecuaciones Binomiales pueden aproximarse, cuando la muestra es grande (mayor de 20), por la Normal, con $\mu = np$ and $\sigma^2 = np(1-p)$.

$$\sum_{x=0}^{c} C_x^n p_0^x (1-p_0)^{n-x} = 1-\alpha = 0.99; \qquad \frac{c-np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} = z_\alpha;$$

$$\Rightarrow$$

$$\sum_{x=0}^{c} C_x^n p_1^x (1-p_1)^{n-x} = \beta^* = 0.01 \qquad \frac{c-np_1}{\sqrt{np_1(1-p_1)}} = -z_{\beta^*}$$

Resolviendo el Sistema para "n" y "c", obtenemos:

$$n = \left[\frac{z_\alpha \sqrt{p_0(1-p_0)} + z_{\beta^*} \sqrt{p_1(1-p_1)}}{p_1 - p_0} \right]^2$$

$$and\ c = np_0 + z_\alpha \sqrt{np_0(1-p_0)}$$

Para el mismo ejemplo numerico anterior substituyendo las proporciones p_0 = 0.0078 and p_1 = 0.1783 en las ecuaciones arriba dadas, obtenemos n y c:

$$n = \left[\frac{z_{0.01}\sqrt{p_0(1-p_0)} + z_{0.01}\sqrt{p_1(1-p_1)}}{p_1 - p_0}\right]^2$$

$$= \frac{z_{0.01}^2\left(\sqrt{p_0(1-p_0)} + \sqrt{p_1(1-p_1)}\right)^2}{(p_1 - p_0)^2}$$

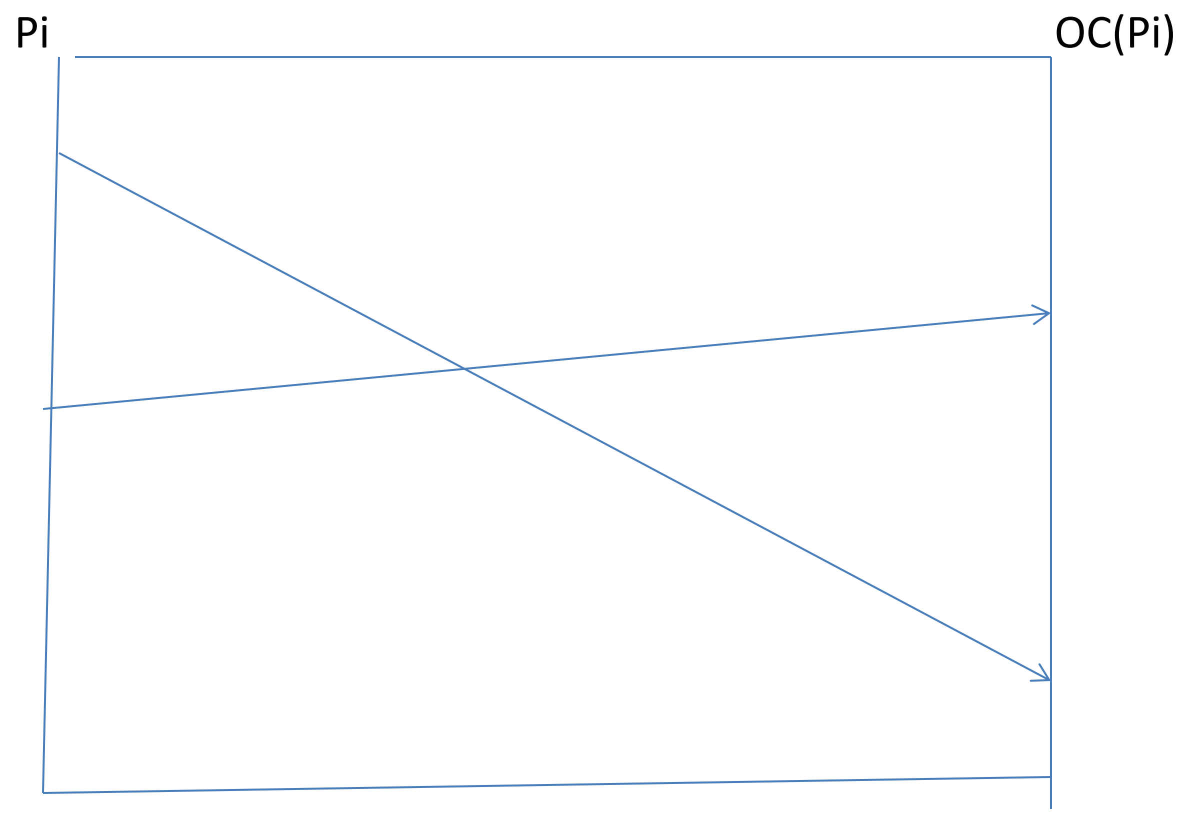
$$= \frac{2.326^2\left(\sqrt{0.0078(1-0.0078)} + \sqrt{0.1783(1-0.1783}\right)^2}{(0.1783 - 0.0078)^2}$$

$$= 41.3 \approx 42$$

$$c = np_0 + z_{0.01}\sqrt{np_0(1-p_0)}$$

$$= 42 \times 0.0078 + 2.326\sqrt{42 \times 0.0078 \times (1 - 0.0078)} = 1.66 \approx 2$$

Para el mismo ejemplo numerico anterior, utilizando las proporciones p_0 = 0.0078, p_1 = 0.1783 y OC(Pi), i=0,1, en el <u>Nomograma</u>, obtenemos n=42,c=2:



Tamano de Muestra para el caso No Parametrico Con Cero Fallas y Confiabilidad (R) conocida.

$$\mathrm{P}[CeroFallas;n]=\sum_{x=0}^{c} C_x^n p^x (1-p)^{n-x} = 1-\alpha$$

$$para\ldots c=0;(1-p)^{n-0}=(1-p)^n=1-\alpha$$

$$para\ldots R=(1-p)=0.95,.\&..\alpha=0.1$$

$$(1-p)^n=R^n=0.95 => R^{45}=0.0994; => n=45;$$

$$Haciendo\ldots(1-p)^n=Exp[n*Ln(1-p)]=\alpha$$

$$n=\frac{Ln(1-Conf)}{Ln(1-p)}=\frac{Ln(\alpha)}{Ln(R)}$$

$$para\ldots R=(1-p)=0.95,.\&..\alpha=0.1$$

$$n=\frac{Ln(0.1)}{Ln(0.95)}=\frac{-1.0}{-0.2227}=44.89\approx 45$$

Tamaños de Muestra utilizando Minitab

Example of calculating sample size for a one-sample t-test

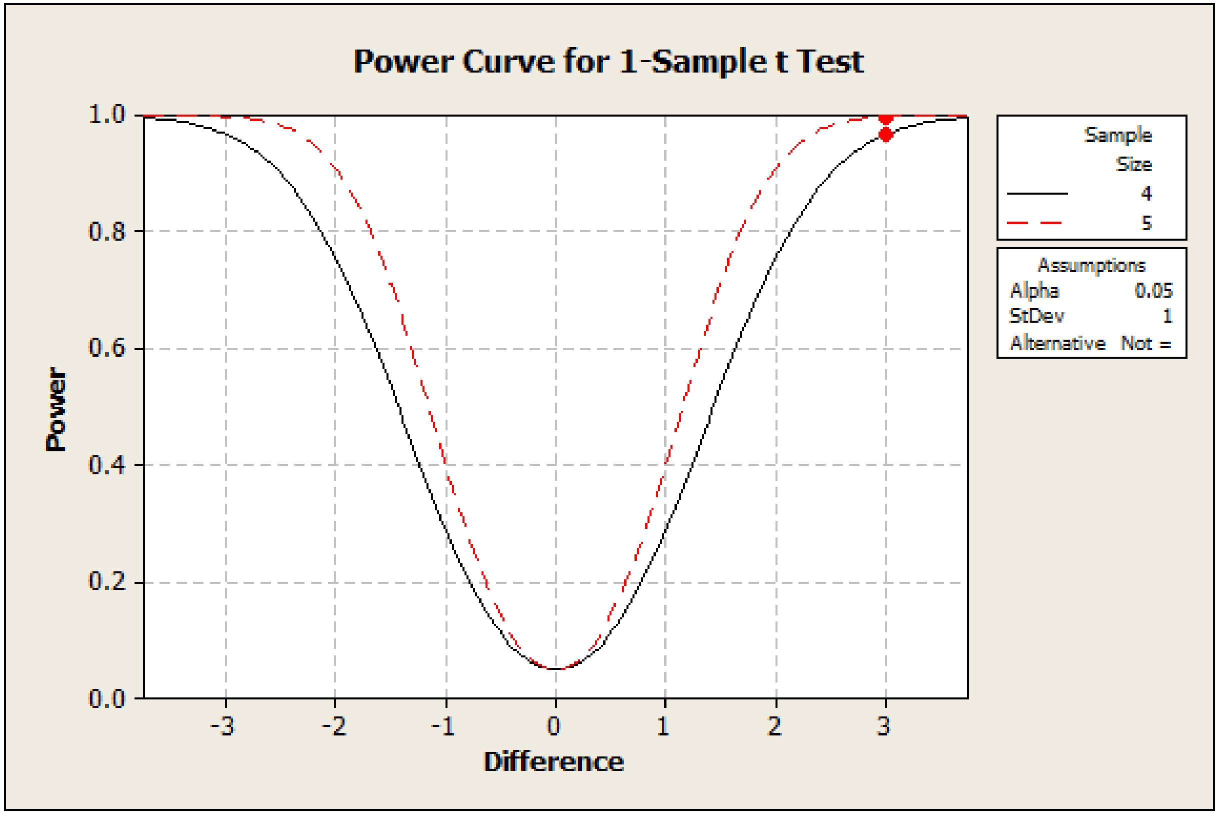
Suppose you are the production manager at a dairy plant. In order to meet state requirements, you must maintain strict control over the packaging of ice cream. The volume cannot vary more than 3 oz for a half-gallon (64-oz) container. The packaging machine tolerances are set so the process s is 1.

How many samples must be taken to estimate the mean package volume at a confidence level of 99% (a = .01) for power values of 0.7, 0.8, and 0.9?

1 Choose **Stat > Power and Sample Size > 1-Sample t**.
2 In **Differences**, enter *3*. In **Power values**, enter *0.9 0.95 0.99*.
3 In **Standard deviation**, enter *1*.
4 Click **Options**. In **Significance level**, enter *0.01*.
5 Click **OK** in each dialog box.

Testing mean = null (vs. not = null) & Calculating power for mean = null + difference
Alpha = 0.05 Assumed standard deviation = 1

Difference	Size	Power	Actual Power
3	4	0.90	0.967001
3	4	0.95	0.967001
3	5	0.99	0.997680



Proyecto Juarez Lincoln Marti de Ed. Int'l

- Web Page: http://web.cortland.edu/matresearch
- El Proyecto Juarez-Lincoln-Marti (JLM), que por sus objetivos educacionales podria haberse llamado Sierra-Dewey-Luz Caballero esta completamente dedicado a proveer programas para mejorar la Educacion Superior en Iberoamerica: http://web.cortland.edu/matresearch/JuarLMDudeTrad.htm
- Para lograr sus objetivos, el Proyecto ha desarrollado muchos programas internacionales, que podrán encontrar en: http://web.cortland.edu/matresearch/JuarezSpPeru.pdf

INSTITUTO DE ESTADISTICA APLICADA Y MEJORA CONTINUA (IEA&MC)

- Web Page del IEA&MC: http://web.cortland.edu/matresearch/QR&CIInstPg.htm
- El **IEAMC** publica y desarrolla tutoriales para ayudar al estudio y mejor entendimiento de la estadística industrial y aplicada, por profesionales y estudiantes interesados en la misma. El material técnico de la Pagina **IEAMC** esta dividido en dos tipos.
- El primero, que denominamos **tutoriales**, consiste en trabajos técnicos de reconocidos autores (que han sido durante muchos anos investigadores y profesores, con publicaciones referidas en revistas profesionales). Estos incluyen artículos, reportes y ejemplos de problemas resueltos.
- El segundo tipo, que denominamos **Webinars**, consiste en artículos científicos presentados en conferencias profesionales, acompañados de sus respectivos Powerpoints.

El Articulo sobre esta Presentacion

- **Determining the Experimental Sample Size**
- Se encuentra en la Pagina del IEA&MC:

  http://web.cortland.edu/romeu/ExperSampSizeQR&CII.pdf

- Al igual que los demas articulos cortos (START Sheets) que aparecen en Lecturas Adicionales referidas al final de esta platica.

Lecturas Adicionales (**asequibles en** IEA&MC):

- Reliability and Life Testing Handbook. Kececioglu, D. Prentice Hall, NJ. 1993.
- Empirical Assessment of the Weibull Distribution. Romeu, J. L. RAC START. Volume 10, Number3. http://src.alionscience.com/pdf/WEIBULL.pdf
- The Anderson-Darling Goodness of Fit Test. Romeu, J. L. RAC START. Volume 10, Number 5. http://src.alionscience.com/pdf/A_DTest.pdf
- Reliability Estimations for the Exponential Life. Romeu, J. L. RAC START. Volume 10, Number 7. http://src.alionscience.com/pdf/R_EXP.pdf
- Determining the Experimental Sample Size QR&CII Institute Tutorial. Volume 1, No. 1 http://lcs3.syr.edu/faculty/romeu/ExperSampSizeQR&CII.pdf
- Quality Toolkit. Coppola, A. RAC, 2001.
- Practical Statistical Tools for Reliability Engineers. Coppola, A. RAC, 2000.
- Statistical Analysis of Materials Data. Romeu, J. L. and C. Grethlein. AMPTIAC, 2000.
- Probability and Statistics for Engineers and Scientists. Walpole, R., R. Myers, S. Myers. Prentice Hall. NJ 1998.
- Introduction to Statistical Analysis (3rd Ed). Dixon, W. J. and F. J. Massey McGraw-Hill. NY 1969.
- An Introduction to Reliability and Maintainability Engineering. Ebeling, C. E. Waveland Press. IL. 1997.
- Mechanical Applications in Reliability Engineering. Sadlon, R. RAC 2000.

About the Author

Jorge Luis Romeu is a Research Professor, Syracuse University (SU), where he teaches statistics, quality and operations research courses. He is also a Senior Science Advisor with Quanterion Solutions Inc./QSI, which operated the RIAC (Reliability Information Analysis Center). Romeu has 40 years applying statistical and operations research methods to HW/SW reliability, quality and industrial engineering. Romeu retired Emeritus from SUNY, where he taught mathematics, statistics and computers. He was a Fulbright Senior Specialist, at universities in Mexico (1994, 2000 and 2003), Dominican Republic (2004), and Ecuador (2006). He created and directs the Juarez-Lincoln-Marti Int'l Ed. Project. Romeu is lead author of A Practical Guide to Statistical Analysis of Materials Property Data. He has developed and teaches many workshops and training courses for practicing engineers and statistics faculty, and has published over forty articles on applied statistics and statistical education. He obtained the Saaty Award for the Best Applied Statistics Paper in American Journal of Mathematics and Management Sciences (AJMMS), in 1997 and 2007, and the MVEEC Award for Outstanding Professional Development in 2002 & 2012. Romeu holds a Ph.D. in Operations Research, is a Chartered Statistician Fellow of the Royal Statistical Society, and a Senior Member of the American Society for Quality, holds certifications in Quality and Reliability. Romeu is Past Regional Director of ASQ Region II and is Vice-Chair of NEQC. For more information, visit http://web.cortland.edu/romeu