

Un estudio teórico de programación no lineal aplicado al emplazamiento óptimo de puentes

Por el Lic. en Matemática Jorge Luis Romeu*

RESUMEN. El presente trabajo trata el problema del emplazamiento óptimo de puentes con un enfoque de programación no-lineal, trasladando el problema del terreno de la ingeniería al de la optimización de una función lineal sujeta a un conjunto de restricciones no lineales. Se hace el desarrollo de un modelo teórico y luego se lleva al campo práctico ilustrándolo con varios ejemplos.

1. INTRODUCCION

El problema del emplazamiento de puentes trata, mediante distintos métodos de cálculo, la obtención de las abscisas que permitan situar un puente de longitud mínima y que cumpla las condiciones hidráulicas (de área mínima requerida) impuestas por el problema.

Uno de estos métodos ha sido automatizado en nuestro Departamento de Computación, en el programa ANA para *emplazamiento de puentes y la determinación de su longitud*

* Grupo Vial Nacional — DAP.

mínima. Con tal método se logra para los efectos prácticos, mediante un esquema de cálculo que lleva muy rápidamente a la solución (2 ó 3 minutos), un emplazamiento óptimo del puente solicitado.

Se nos plantea entonces ensayar los métodos matemáticos para deducir teóricamente las abscisas del emplazamiento óptimo del puente y compararlas con las del emplazamiento práctico obtenido con el programa ANA. De este modo se puede analizar hasta qué grado es óptima la solución práctica ofrecida por el programa ANA, y se logra a la vez un nuevo enfoque de un problema viejo y un camino distinto —aunque sin pretensiones de ser más sencillo ni mejor que los otros— para llegar a un resultado positivo, por lo que pensamos que el presente trabajo será de interés para los que se ocupan de estas cuestiones.

1.1. Conceptos fundamentales

En el tratamiento del problema que incluye la deducción de un modelo práctico utilizaremos, además de los conceptos de rigor en ingeniería, algunos conceptos de la teoría de la programación no lineal y del análisis matemático en general.

La programación no-lineal es un caso de la lineal. Esta última trata de optimizar una función matemática lineal llamada *función objetivo*, sujeta a una serie de restricciones que también deben ser lineales. Estas funciones restricciones determinan un subconjunto de *soluciones admisibles* dentro del cual se encuentran las *soluciones óptimas*.

Decimos soluciones en plural porque no siempre la solución óptima es única. Más de una solución, evaluadas en la función objetivo, puede dar el mismo valor óptimo (máximo o mínimo). Lo que garantiza la teoría es que no existe otra solución mejor que las soluciones óptimas, vale decir que, evaluada en la función objetivo, obtenga un valor menor (en caso de buscar un mínimo) o mayor (en caso de un máximo) que el obtenido con las soluciones óptimas.

En la programación no-lineal, bien la función objetivo, bien las funciones restricciones, no son lineales. Esto com-

plica el problema grandemente, ya que los teoremas que nos permiten determinar el conjunto de soluciones óptimas no pueden determinarse de la misma manera.

El caso que nos ocupa es de programación no-lineal. Hemos convertido el problema de emplazamiento del puente en un problema que consiste en optimizar una función lineal sujeta a una serie de restricciones no lineales.

2. FUNDAMENTO TEORICO

Partiendo del caso más sencillo: emplazamiento de un puente sin socavación, sobre un río de cauce central único con declives regulares en las zonas de inundación izquierda y derecha (figura 1).

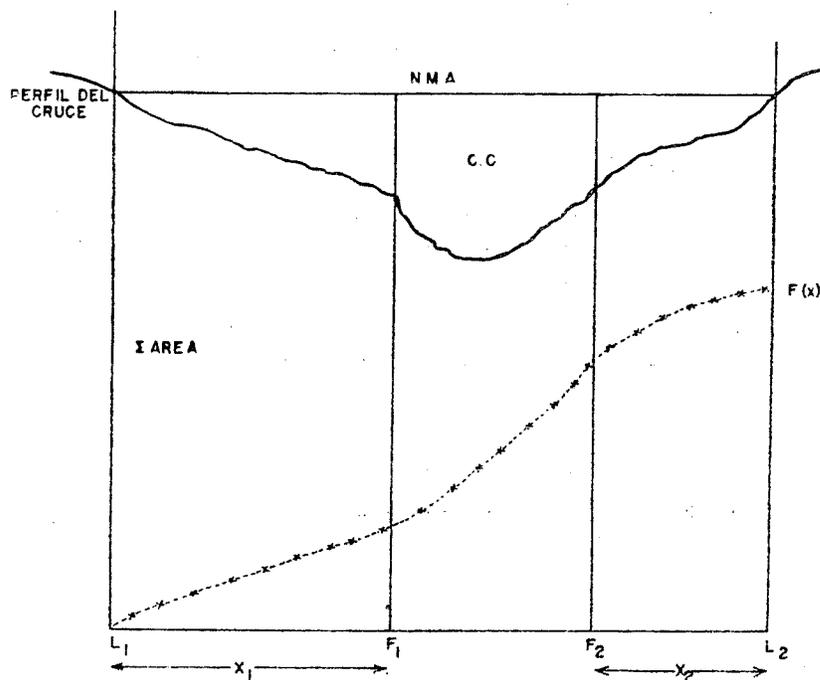


FIGURA 1

2.1. Nomenclatura

Utilizaremos las siguientes definiciones y nomenclatura:

R conjunto de los números reales

L_1 extremo izquierdo del cauce al nivel máximo de agua

L_2 extremo derecho del cauce al nivel máximo de agua

F_1 abscisa izquierda del cauce central

F_2 abscisa derecha del cauce central

K constante de la condición hidráulica del puente (área necesaria)

$X_1 = \{x \in R : L_1 \leq x \leq F_1\}$ emplazamientos posibles del estribo izquierdo

$X_2 = \{x \in R : F_2 \leq x \leq L_2\}$ emplazamientos posibles para el derecho

$F(x)$ función teórica de la integral de área,
 $x \in [L_1, L_2]$

$P(x_1, x_2)$, $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$ función teórica que evalúa el área bajo el puente entre cualesquiera dos estribos

$G(x_1, x_2)$, $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$ función teórica que relaciona el área entre estribos con la condición hidráulica del problema

$P_n(x)$; $P_n(x_1, x_2)$; $G_n(x_1, x_2)$ funciones empíricas que aproximan respectivamente las anteriores

$$G = \{(x_1, x_2) \in R^2, x_1 \in X_1, x_2 \in X_2 : G(x_1, x_2) \geq 0\}$$

$$\bar{G} = \{(x_1, x_2) \in R^2, x_1 \in X_1, x_2 \in X_2 : G(x_1, x_2) = 0\}$$

$M(X) = x_2 - x_1$ función objetivo (función a optimizar)
 $\min M(X)$ el problema de optimización.
 $(x_1, x_2) \in \bar{G}$

2.2. Planteo

Observemos en la figura 1 el gráfico de suma de área vs abscisa. Se tiene una sucesión de puntos obtenidos de los

datos topográficos del terreno. Si se calculara de la misma forma la suma de área para $x \in [L_1, L_2]$, obtendríamos una función $F(x)$, continua, derivable y estrictamente creciente en $[L_1, L_2]$. Esta función teórica, $F(x)$, dará la integral de área para todo el punto del cauce en cuestión.

En todo par de puntos $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$ podemos evaluar el área bajo el puente si se sitúan los estribos en estas abscisas; definimos:

$$P(x_1, x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

a la función que la calcula y que será también continua, derivable y positiva.

Definimos una función para relacionar los posibles estribos del puente con la condición hidráulica que éste debe cumplir:

$$G(x_1, x_2) = P(x_1, x_2) - K = F(x_2) - F(x_1) - K;$$

$$x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$$

Entonces:

$$G(x_1, x_2) \begin{cases} \geq 0 & \text{si situando el puente sobre esos estribos} \\ & \text{al menos se cumple la condición} \\ & \text{hidráulica del problema (área necesaria)} \\ < 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Hagamos: $x_1 = L_1$

Entonces existe al menos $x \in X_2$ tal que:

$$(x_1, x) \in G \leftrightarrow G(x_1, x) \geq 0 \quad (1)$$

Y el menor $x \in X_2$ que cumple (1), denotémoslo $x = x_2$ cumple que:

$$G(x_1, x_2) = 0 \leftrightarrow (x_1, x_2) \in \bar{G}$$

Físicamente $x_2 \in X_2$ es la menor abscisa que nos da el estribo derecho para obtener el puente de longitud mínima y

que cumpla la condición hidráulica, fijado el estribo izquierdo en la abscisa $x_1 \in X_1$.

Hagamos así con todo $x_1 \in X_1$ hasta encontrar un $x_1^0 \in F_1$ tal que ya no se cumple la condición hidráulica del puente, o sea:

$$G(x_1^0, L_2) < 0$$

lo cual vale decir que el área bajo el puente emplazado entre x_1^0 y cualquier punto de la zona de inundación derecha, hasta L_2 , será menor que el área necesaria impuesta por las condiciones hidráulicas del problema.

Entonces, aplicando el teorema de la Función Implícita a la función:

$$G(x_1, x_2) = 0$$

obtenemos una expresión que nos permite hallar la abscisa derecha en función de la izquierda, en el punto crítico donde se cumple exactamente la condición hidráulica establecida por el problema. Denotémosla:

$$x_2 = D(x_1)$$

Esta función es también continua, derivable y estrictamente creciente, y los puntos $(x_1, x_2) \in R^2$, $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$ que la satisfacen pertenecen al conjunto \bar{G} .

Con estas funciones trasladamos el problema del emplazamiento óptimo del puente de la siguiente manera.

Planteamiento de ingeniería.

Se desea construir un puente de longitud mínima entre sus estribos que, sin violar el cauce central del río, cumpla la condición hidráulica impuesta por el problema.

Replanteo matemático:

Se desea minimizar una función:

$$M(X) = x_2 - x_1$$

sujeta a restricciones:

$$1) \quad x_1 \in X_1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-A) & x_1 \geq L_1 \\ 1-B) & x_1 \leq F_1 \end{cases}$$

$$2) \quad x_2 \in X_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2-A) & x_2 \geq F_2 \\ 2-B) & x_2 \leq L_2 \end{cases}$$

$$3) \quad (x_1, x_2) \in G \Leftrightarrow G(x_1, x_2) \geq 0 \Leftrightarrow x_2 \geq D(x_1)$$

O lo que es equivalente, calcular:

$$\min M(X)$$

$$(x_1, x_2) \in \bar{G}$$

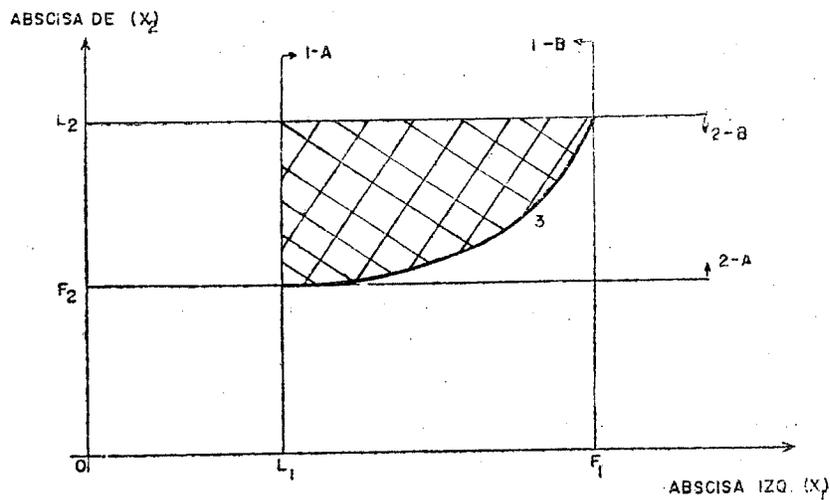


FIGURA 2

2.3. Resolución

La función $M(X)$ a optimizar (función objetivo) es, geoméricamente, una recta de pendiente uno que se desplaza libremente sobre el plano real, cuyo eje horizontal representa la abscisa izquierda y cuyo eje vertical representa la abscisa derecha de los estribos del puente, respectivamente. Si no

existiera la restricción hidráulica (3ra.) para el emplazamiento del puente, dicho óptimo estaría situado en el punto (F_1, F_2) del plano real, o sea, el vértice inferior derecho del rectángulo que determinan las restricciones 1-A, 1-B, 2-A, 2-B del problema. Esta área encierra todas las soluciones admisibles y su punto de tangencia con la recta $M(X)$ determina el emplazamiento óptimo del puente.

Pero al existir además la restricción tercera, el área del subconjunto de soluciones admisibles se reduce a la sombreada en la figura 2. Entonces, las abscisas del emplazamiento óptimo corresponden a las coordenadas del punto de tangencia de la recta $M(X)$ con la función:

$$(2) \quad x_2 = D(x_1)$$

Y como la primera derivada de una función, evaluada en un punto nos da la pendiente de la tangente a dicha función en el punto, y es evidente que la recta $M(X)$ tiene pendiente uno, tenemos:

$$D'(x_1) = 1 \Leftrightarrow D'(x_1) - 1 = 0$$

Entonces, resolviendo esta ecuación obtenemos el valor de x_1^0 o abscisa del estribo izquierdo del puente, y sustituyendo este valor en la ecuación (2) obtenemos x_2^0 o abscisa del estribo derecho.

Hemos encontrado así el emplazamiento óptimo del puente. No existe otro emplazamiento mejor que el dado por el punto de tangencia (x_1^0, x_2^0) que determina las abscisas de los estribos del puente de longitud mínima, y esta longitud es, precisamente:

$$M(X) = x_2^0 - x_1^0$$

3. DESARROLLO PRACTICO

En el epígrafe anterior hemos deducido teóricamente un modelo matemático que representa el problema del emplazamiento de puentes.

Ahora bien, cuando las dificultades para hallar una expresión matemática de una ley o un modelo son muy grandes o insuperables, como en el caso presente, es perfectamente válido recurrir a métodos empíricos para aproximar dichas funciones teóricas, siempre que el ajuste logrado con las funciones empíricas sea suficientemente bueno.

Es a este método al que recurriremos en lo que sigue, aproximando funciones polinomiales a los datos del problema original mediante los mínimos cuadrados. Estas funciones sustituirán a las desconocidas deducidas en el epígrafe anterior, pero manteniendo en todo momento las mismas características y propiedades de aquéllas.

3.1. Funciones empíricas

Dada la dificultad que existe para obtener teóricamente la expresión $F(x)$, que escapa a los límites y el fin de este trabajo, será ajustada por el método de los mínimos cuadrados a un polinomio de grado n , con n impar:

$$P_n(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

que tiene las mismas propiedades de ser continuo, derivable y estrictamente creciente en (L_1, L_2) que la función teórica $F(x)$.

El polinomio $P_n(x)$ para $n=9$ es suficiente en la práctica, y se obtiene ajustando los "p" pares de punto de suma de área en cada abscisa del cauce, tomada en el terreno, que es un dato conocido del problema.

Entonces, el área entre cualquier par de abscisas $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$ se puede estimar con:

$$\begin{aligned} P_n(x_1, x_2) &= P_n(x_2) - P_n(x_1) \\ &= \alpha_n (x_2^n - x_1^n) + \alpha_{n-1} (x_2^{n-1} - x_1^{n-1}) + \dots + \alpha_1 (x_2 - x_1) \end{aligned}$$

que es la función empírica que sustituye en el modelo a la función teórica $P(x_1, x_2)$.

Igualmente, la función teórica $G(x_1, x_2)$, que relaciona los posibles estribos del puente con la condición hidráulica del mismo, es sustituida por la función polinomial empírica:

$$G_n(x_1, x_2) = P_n(x_1, x_2) - K = P_n(x_2) - P_n(x_1) - K; \quad \begin{array}{l} x_1 \in X_1 \\ x_2 \in X_2 \end{array}$$

que al igual que en el desarrollo teórico cumple que si:

$$G_n(x_1, x_2) \begin{cases} \geq 0 & \text{el puente situado sobre esos estribos} \\ & \text{cumple al menos la condición hidráu-} \\ & \text{lica del problema.} \\ < 0 & \text{el puente no cumple la condición hi-} \\ & \text{dráulica impuesta por el problema.} \end{cases}$$

E igualmente se cumplen todas las demás definiciones dadas en el epígrafe 2, por ejemplo:

$$(x_1, x_2) \in G \Leftrightarrow G_n(x_1, x_2) \geq 0$$

Denotemos por:

$$P_n(x_1) = P_n(x) \Big|_{x=x_1} \in R$$

la evaluación del polinomio $P_n(x)$ para un valor cualquiera $x = x_1 \in [L_1, L_2]$.

Entonces, procederemos aquí al igual que procedimos en el epígrafe 2.2. para encontrar el subconjunto \bar{G} de emplazamientos mínimos (los que cumplen exactamente con la condición hidráulica del puente):

$$\text{Fijemos } x_1 = L_1$$

Resolvemos la ecuación:

$$G_n(x_1, x) = P_n(x_1, x) - K = P_n(x) - P_n(x_1) - K = 0$$

y como:

$$P_n(x_1) - K \in R$$

Resulta que el polinomio $G_n(x_1, x)$ difiere del polinomio original, $P_n(x)$, sólo en el término independiente, por lo que

puede considerarse como el polinomio $P_n(x)$ que se desplaza verticalmente sobre el plano R^2 .

Procederemos así para calcular x_2 a partir de x_1 , en vez de despejar en la ecuación $G_n(x_1, x_2)$ y obtener directamente x_2 como función de x_1 (tal y como hicimos en el desarrollo teórico con la función: $x_2 = D(x_1)$) debido a la imposibilidad de obtener en la práctica una función implícita de x_1 a partir del polinomio

$$G_n(x_1, x_2) = z_n(x_2^n - x_1^n) + \dots + z_1(x_2 - x_1)$$

Más, nuestro proceder es válido y operativo, ya que el nuevo polinomio $G_n(x_1, x_2)$ es un desplazamiento vertical del polinomio $P_n(x)$ estrictamente creciente en $[L_1, L_2]$ y que conocemos el sub intervalo en que debe encontrarse la raíz x_2 buscada y que no es otro que $X_2 = [F_2, L_2] \subset [L_1, L_2]$.

Por lo tanto, es posible obtener por métodos de convergencia (ya que no existen métodos analíticos exactos para calcular las raíces de polinomios mayores de tercer grado) el valor $x_2 \in X_2$ correspondiente al valor $x_1 \in X_1$.

De esta forma, y barriendo el intervalo X_1 análogamente a lo explicado en el epígrafe 2.2, logramos el mismo resultado que el buscado en el desarrollo teórico del modelo, utilizando la función: $x_2 = D(x_1)$ (ver anexo 1).

Calculando un número suficiente de pares $(x_1, x_2) \in \bar{G}$ mediante el procedimiento anterior podemos:

- a) Graficarla sobre el plano R^2 y encontrar la solución óptima del puente trazando la tangente de pendiente 1 a la curva que pasa por estos puntos.
- b) Ajustar, mediante el método de los mínimos cuadrados, la parábola que pasa por los puntos dados, derivarla y resolver la ecuación de la derivada igualada a 1, tal y como se explicó en el epígrafe 2.3.

Hemos llegado entonces a la solución buscada con sólo sustituir las funciones teóricas desconocidas por funciones empíricas, calculadas con los datos del problema, por el método de los mínimos cuadrados. Y esta es la mejor comprobación de que el desarrollo teórico es correcto.

No obstante, es necesario hacer notar que para los fines prácticos o computacionales, el hecho de ajustar el polinomio $P_n(x)$ a la sucesión de puntos dados por las cotas del cauce y su integral de área, perdemos precisión por bueno que sea el ajuste. Y del mismo modo podemos expresarnos sobre la parábola ajustada a la sucesión de puntos $(x_1, x_2) \in \bar{G}$ del inciso b) arriba explicado.

Por lo tanto, los valores numéricos obtenidos por este método son aproximados. Se hallarán, eso sí, muy cerca de los valores encontrados utilizando el programa ANA, de emplazamiento óptimo de puentes, o cualquier otro esquema de cálculo tradicional. Y en muchos casos, las diferencias numéricas entre los resultados tradicionales y los obtenidos por este método han de ser tan pequeñas que para los fines constructivos puedan considerarse no significativas.

Es por esta razón que recomendamos el método gráfico para la resolución del problema de optimización. Los redondeos ocasionados inevitablemente por el ajuste de las dos curvas anteriores nos hacen perder alguna precisión. Por lo tanto, buscar el punto de tangencia por métodos gráficos es no sólo más rápido y menos elaborado matemáticamente hablando, sino que no se pierde mucha más precisión que la diluida en los ajustes.

Lo que sí queda demostrado con este desarrollo es la unicidad del emplazamiento óptimo y la factibilidad de utilizar el óptimo práctico hallado con el empleo del programa ANA. La diferencia que pueda existir entre este último y el óptimo teórico será, constructivamente, insignificante por encontrarse ambos en la región de tangencia y conllevar esto una diferencia numérica de algunos decímetros, a la suma, en la longitud del puente.

4. EJEMPLO NUMERICO

A continuación desarrollaremos completamente un ejemplo real siguiendo los esquemas de cálculo descritos en el epígrafe 3. Obtendremos con ello una comprobación de la teoría desarrollada y una ilustración del procedimiento de cálculo.

**4.1. Proyecto: Ferrocarril Central. Río Calabazas.
Sancti-Spíritus, Cuba**

Datos del problema:

- $L_1 = 48,2$ extremo izquierdo del cauce
 $F_1 = 69,5$ abscisa izquierda del cauce central.
 $F_2 = 79,0$ abscisa derecha del cauce central
 $L_2 = 90,12$ extremo derecho del cauce
 $K = 188 \text{ m}^2$ condición hidráulica del puente.

Resultado del emplazamiento del puente, según el programa ANA de nuestro Departamento de Computación:

- Abscisa izquierda $x_1 = 56,93$
 Abscisa derecha $x_2 = 86,64$
 Longitud del puente $x_2 - x_1 = 29,71$

Trasladamos estos datos al modelo de optimización:

Hallar el mínimo de la función: $M(X) = x_2 - x_1$ sujeto a las restricciones:

- 1-A : $x_1 \geq 48,2$ 2-A : $x_2 \geq 79,0$
 1-B : $x_1 \leq 69,5$ 2-B : $x_2 \leq 90,12$

Deduciremos la 3ra. restricción más adelante.

TABLA I-A
Datos de campo y estimaciones por el polinomio $P_n(X)$

Estación	Area	Area estimada
48,2	0,00	-0,08
49,5	0,49	0,69
52,5	4,19	4,28
57,0	16,25	16,07
60,0	29,58	28,85
63,5	49,60	48,61
68,0	77,20	80,20
69,5	86,73	91,76
72,0	104,43	111,56
72,5	132,50	115,54
79,0	160,14	164,39
82,0	181,97	182,89
84,5	196,87	195,34
89,0	211,33	210,24
90,5	212,31	213,19

Comenzaremos tomando los datos topográficos del terreno que aparecen en la tabla I-A: Estación y suma de área correspondientes para 15 puntos topográficos.

Para estos 15 puntos se ajustó un polinomio de grado nueve.

Los valores numéricos de los coeficientes α_i ; $0 \leq i \leq 9$ de este polinomio, así como las estimaciones que en él se obtuvieron de las sumas de áreas en las 15 estaciones dadas como dato, aparecen en la tabla I-B.

TABLA I-B
Coeficientes del polinomio $P_n(X)$ de aproximación

alfa (0) =	- 0,16899 E + 04
(1) =	0,10715 E + 03
(2) =	- 0,17697 E + 01
(3) =	- 0,14888 E - 01
(4) =	0,59798 E - 03
(5) =	- 0,15439 E - 05
(6) =	- 0,73245 E - 07
(7) =	0,80559 E - 09
(8) =	- 0,34200 E - 11
(9) =	0,63139 E - 14

Observemos cómo las estimaciones de las sumas de área en cada estación coinciden prácticamente con el valor dado salvo para los valores incluidos en, o muy próximos a, el cauce central. Estos valores no nos interesan por no poder emplazarse el puente entre estas abscisas, puesto que violan el cauce central, o sea, las restricciones I-B, 2-A.

Con este polinomio de noveno grado utilizamos el esquema de cálculo que aparece en el anexo 1 y obtenemos los puntos $(x_1, x_2) \in G$ más próximos a, o que están sobre \bar{G} (la curva de los emplazamientos mínimos para cada abscisa del cauce).

Estos puntos aparecen en la tabla II y representan para nosotros la restricción 3, teóricamente expresada por la ecuación $(x_2 = D(x_1))$.

Para obtener la solución gráfica del problema de optimización, graficamos los puntos de la tabla II (figura 3) y trazamos con el curvígrafo la curva que los relaciona. La solución se encuentra en el punto de tangencia de esta curva con la recta de pendiente 1 (ver figura 3).

TABLA II

El cauce ha sido barrido

Coordenadas de los emplazamientos posibles

Abscisa izquierda	Abscisa derecha	Abscisa izquierda	Abscisa derecha
48,20	83,00	53,80	84,40
48,40	83,00	54,00	84,50
48,60	83,00	54,20	84,60
48,80	83,00	54,40	84,70
49,00	83,00	54,60	84,80
49,20	83,10	54,80	84,90
49,40	83,10	55,00	85,10
49,60	83,10	55,20	85,20
49,80	83,10	55,40	85,30
50,00	83,20	55,60	85,50
50,20	83,20	55,80	85,60
50,40	83,30	56,00	85,80
50,60	83,30	56,20	86,00
50,80	83,30	56,40	86,10
51,00	83,40	56,60	86,30
51,20	83,40	56,80	86,50
51,40	83,50	57,00	86,70
51,60	83,50	57,20	87,00
51,80	83,60	57,40	87,20
52,00	83,70	57,60	87,40
52,20	83,70	57,80	87,70
52,40	83,80	58,00	88,00
52,60	83,90	58,20	88,30
52,80	83,90	58,40	88,60
53,00	84,00	58,60	89,00
53,20	84,10	58,80	89,40
53,40	84,20	59,00	89,80
53,60	84,30	59,20	90,30

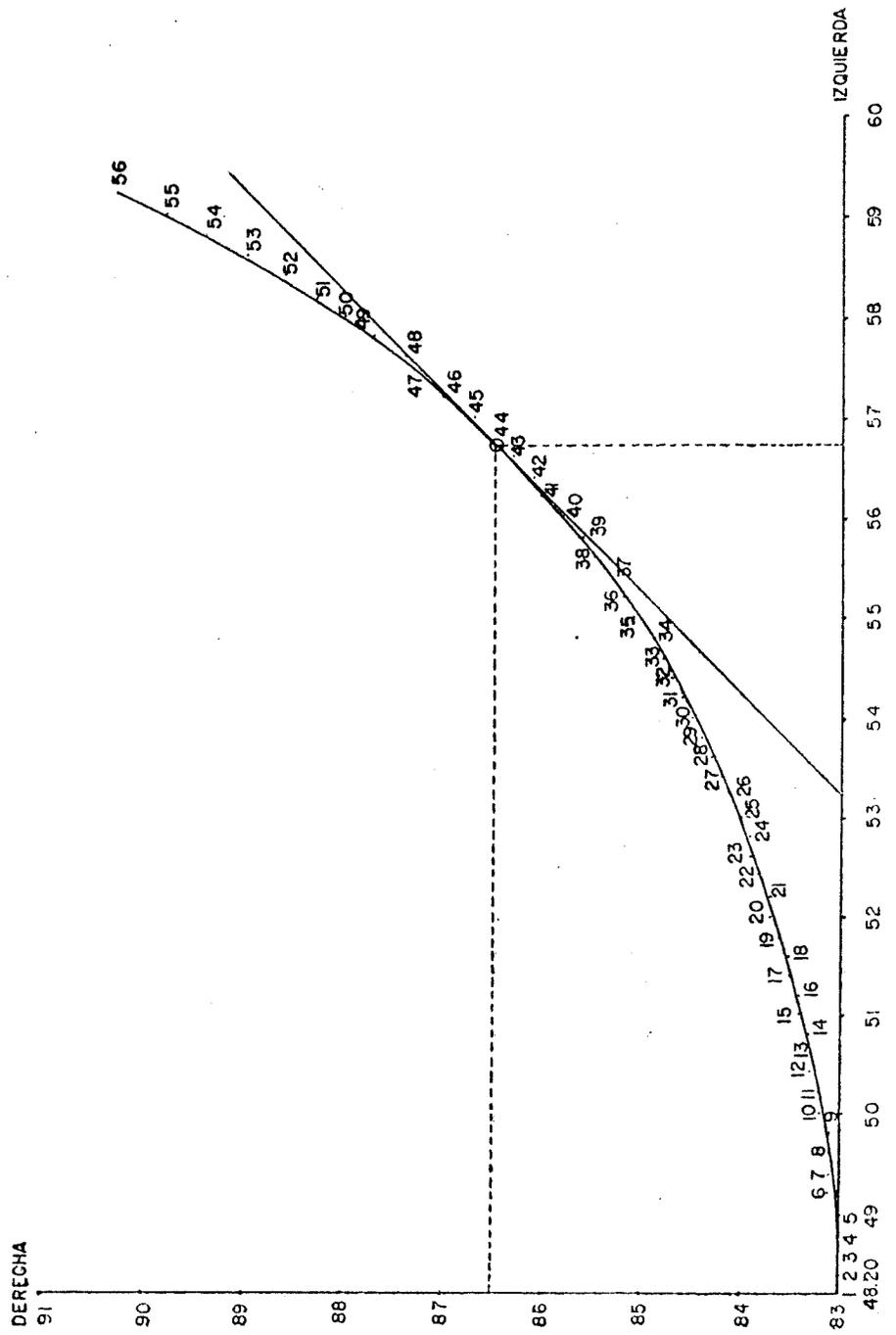


Fig. 3. Plano de emplazamiento óptimo de puentes utilizando el método de programación no lineal.

Los resultados obtenidos fueron:

$$\begin{aligned} \text{Abscisa izquierda:} & \quad x_1 = 56,7 \\ \text{Abscisa derecha:} & \quad x_2 = 86,5 \\ \text{Longitud de puente:} & \quad x_2 - x_1 = 29,8 \text{ m.} \end{aligned}$$

Para obtener la solución analítica del problema de optimización, ajustamos una parábola a los puntos dados en la Tabla II por los mínimos cuadrados, y obtenemos la ecuación:

$$f(x_1) = \beta_2 x_1^2 + \beta_1 x_1 + \beta_0 = 0$$

donde:

$$\begin{aligned} \beta_2 &= 0,0696212 \\ \beta_1 &= -6,89431 \\ \beta_0 &= 253,856 \end{aligned}$$

Como la condición de la tangencia es:

$$f'(x_1) = 2\beta_2 x_1 + \beta_1 = 1$$

tenemos:

$$x_1 = \frac{1 - \beta_1}{2\beta_2} = 56,694728$$

Entonces:

$$x_2 = f(x_1) = 86,767848$$

Y los resultados obtenidos son:

$$\begin{aligned} \text{Abscisa izquierda:} & \quad x_1 = 56,69 \\ \text{Abscisa derecha:} & \quad x_2 = 86,76 \\ \text{long.} & \quad x_2 - x_1 = 30,07 \text{ m.} \end{aligned}$$

Comprobando la solución analítica sobre las estaciones del terreno, interpolando linealmente para obtener la suma del área correspondiente a las abscisas de los estribos del puente:

Estación	Area
56,69	15,31
86,76	204,13

$P(x_1, x_2) = 188,82$ cumple la condición hidráulica.

TABLA III
Otros ejemplos de emplazamientos óptimos

PUENTE	PROGRAMA ANA		OPT. NO LINEAL	
	x_1	x_2	x_1	x_2
Calabazas—Variante 1*	59,07	84,34	57,74	84,02
Calabazas—Variante 2*	60,98	83,90	60,32	84,05
Cienfuegos—S. Spíritus	73,35	121,96	76,45	123,03
Grande Majagua	8 004,0	8 059,67	8 004,0	8 060,0

* Con distintos coeficientes de rugosidad y para analizar la sensibilidad del método para y críticos.

tran
cóm
de
ópti
dife
hem
nue

5.

exte
ma
mo

con

5.1.

tan
ent
var

del
tru
var

est
dos
fes

Hemos visto como los resultados obtenidos se encuentran muy cercanos al obtenido mediante el programa ANA, cómo cumplen la condición hidráulica del problema y cómo, de acuerdo con el enfoque teórico, este emplazamiento es óptimo, o sea, no existe otro emplazamiento en otra posición diferente que arroje un puente de longitud menor. Luego hemos alcanzado todos los objetivos planteados al inicio de nuestro trabajo.

Emplazamiento	x_1	x_2	$x_2 - x_1$
Programa ANA	56,93	86,64	29,71
Método gráfico	56,7	86,5	29,8
Método analítico	56,69	86,76	30,07

5. COBERTURA

Pensamos que los resultados de nuestro trabajo pueden extenderse a cualquier tipo de cauce, aunque por el carácter matemático de este estudio no hemos pretendido, ni podemos hacer un análisis exhaustivo de casos de puentes.

Trataremos de generalizar el problema de optimización considerando dos casos de cauce más complejos.

5.1. Casos de cauces múltiples

Este es el caso más sencillo, ya que puede desglosarse en tantos sub-casos como cauces únicos lo compongan, y tratar entonces cada sub-caso independientemente para obtener así varios resultados parciales.

Con ellos es cuestión de un análisis técnico, por parte del ingeniero, para ver si la mejor solución consiste en construir un puente único que abarque todos los cauces o hacer varios puentes individuales.

De todas formas, a los efectos de la materia que trata este estudio, las herramientas propuestas siguen considerándose útiles y válidas, y la teoría desarrollada en los epígrafes anteriores consistente.

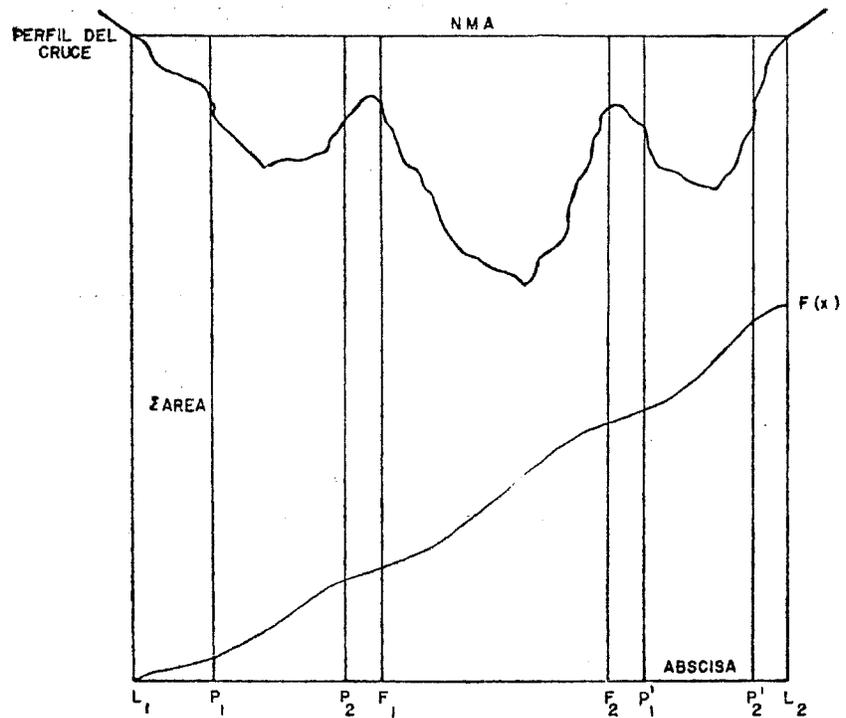


FIGURA 4

5.2. Cauces irregulares

Consideremos un cauce irregular como el que aparece en la figura 4, cuya función teórica $F(x)$, integral de área, también aparece en dicha figura.

Supongamos que el área necesaria K impuesta por las condiciones hidráulicas del problema sea tal que existan dos emplazamientos óptimos en dos posiciones distintas del cauce:

- 1er. emplazamiento: $x_1 = P_1; \quad x_2 = P_1'$
- 2do. emplazamiento: $x_1 = P_2; \quad x_2 = P_2'$

Por lo tanto, se cumple que

$$P_2' - P_2 = P_1' - P_1$$

con $G_n(P_2, P_2') = G_n(P_1, P_1') = 0$

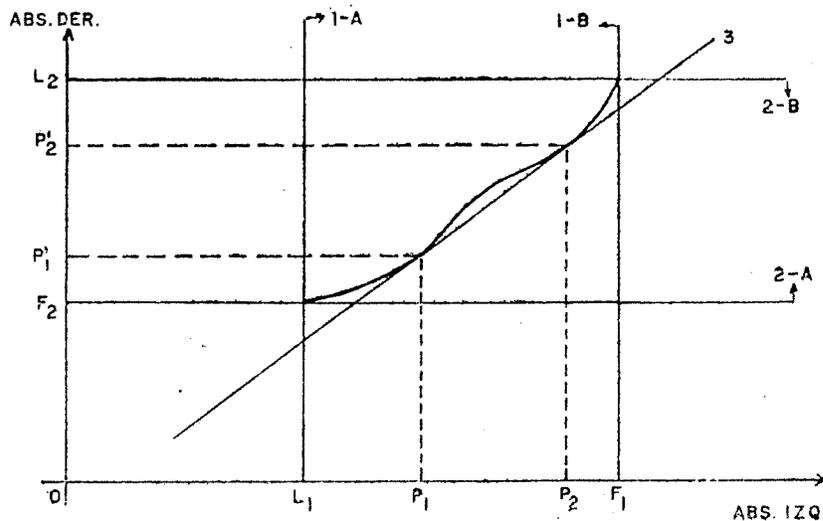
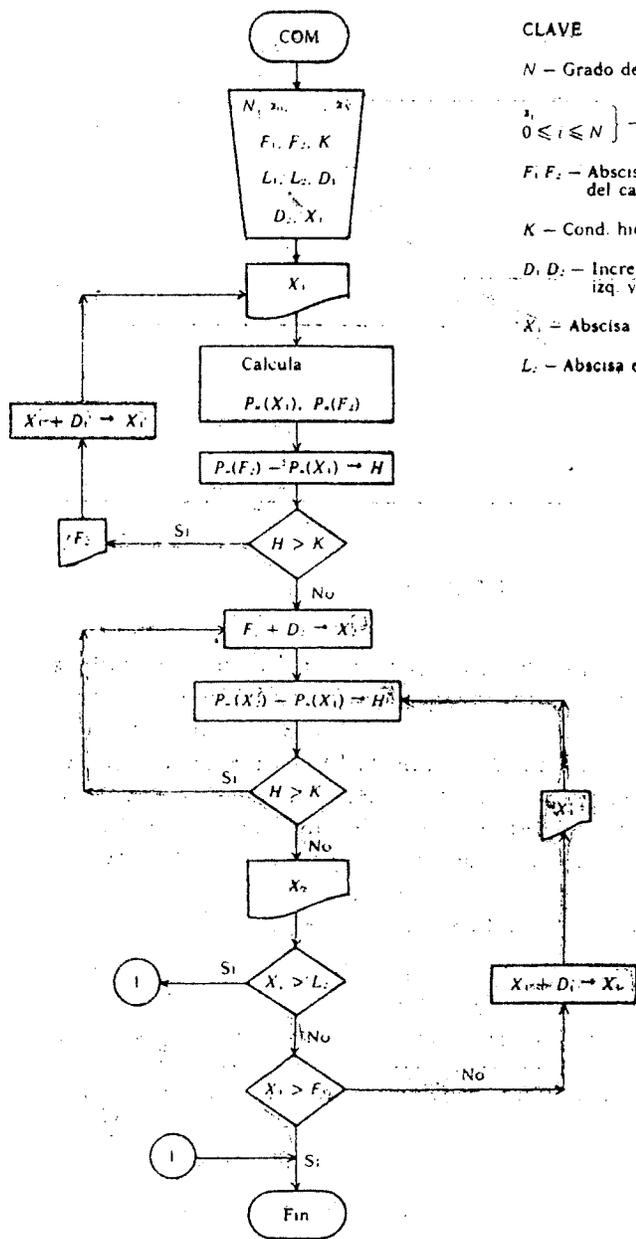


FIGURA 5

Entonces, como puede apreciarse en la figura 5, la quinta restricción teórica, que viene dada por la función $x_2 = D(x_1)$, tendría una forma sinuosa con la que obtendríamos dos puntos de tangencia con la recta $M(X)$. Este resultado es consistente con el modelo teórico descrito en el epígrafe 2, pues nos encontramos en el caso de más de una solución óptima. A los efectos del desarrollo práctico obtendremos un ajuste muy malo en la parábola que nos da la aproximación empírica de la 3ª restricción teórica: $x_2 = D(x_1)$.

Esto nos dice que un polinomio de 2º grado no es suficiente para obtener una aproximación de dicha función y que debemos ajustar a un polinomio de mayor grado. Al aumentar convenientemente el grado de esta función obtendremos los resultados esperados. Esto para el desarrollo analítico.

Para la solución gráfica el resultado es inmediato, al plotear sobre el plano los puntos obtenidos por el esquema de cálculo dado en el Anexo 1. Cuando tracemos con el curvígrafo la función que describen estos puntos y tracemos la recta, tangente a ella y de pendiente 1 (función $M(X)$,



CLAVE

N - Grado del polinomio

F_1, F_2, K
 $0 \leq i \leq N$ } - Coeficientes del polinomio.

F_1, F_2 - Abscisas izq. y derecha
del cauce central

K - Cond. hidráulica

D_1, D_2 - Incremento de las abscisas
izq. y derecha

X_1 - Abscisa izq. inicial

L_2 - Abscisa extrema derecha

ANEXO No 1

veremos que existen dos puntos de tangencia y no uno, como en el ejemplo presente.

El caso que hemos descrito es el crítico y no el usual; consideremos entonces el mismo cauce de la figura 4, suponiendo esta vez:

$$P_1' - P_1 < P_2' - P_2$$

$$G_v(P_2, P_2') = 0$$

$$G_v(P_1, P_1') = 0$$

vale decir que el 2do. emplazamiento es un óptimo local (óptimo para una sub-zona del cauce), mientras que el 1er. emplazamiento es un óptimo global (óptimo absoluto; que no existe otro emplazamiento que dé un puente de longitud mínima).

Entonces la tercera restricción $x_2 = D(x_1)$ toma la forma descrita en la figura 6, donde el punto (P_2, P_2') es un óptimo local, mientras que (P_1, P_1') es el emplazamiento óptimo del puente u óptimo global.

Esta es una de las implicaciones más fuertes de este trabajo: podemos ser capaces de distinguir el óptimo global, o el mejor emplazamiento del puente de los óptimos locales o emplazamientos mínimos relativos a una parte del cauce.

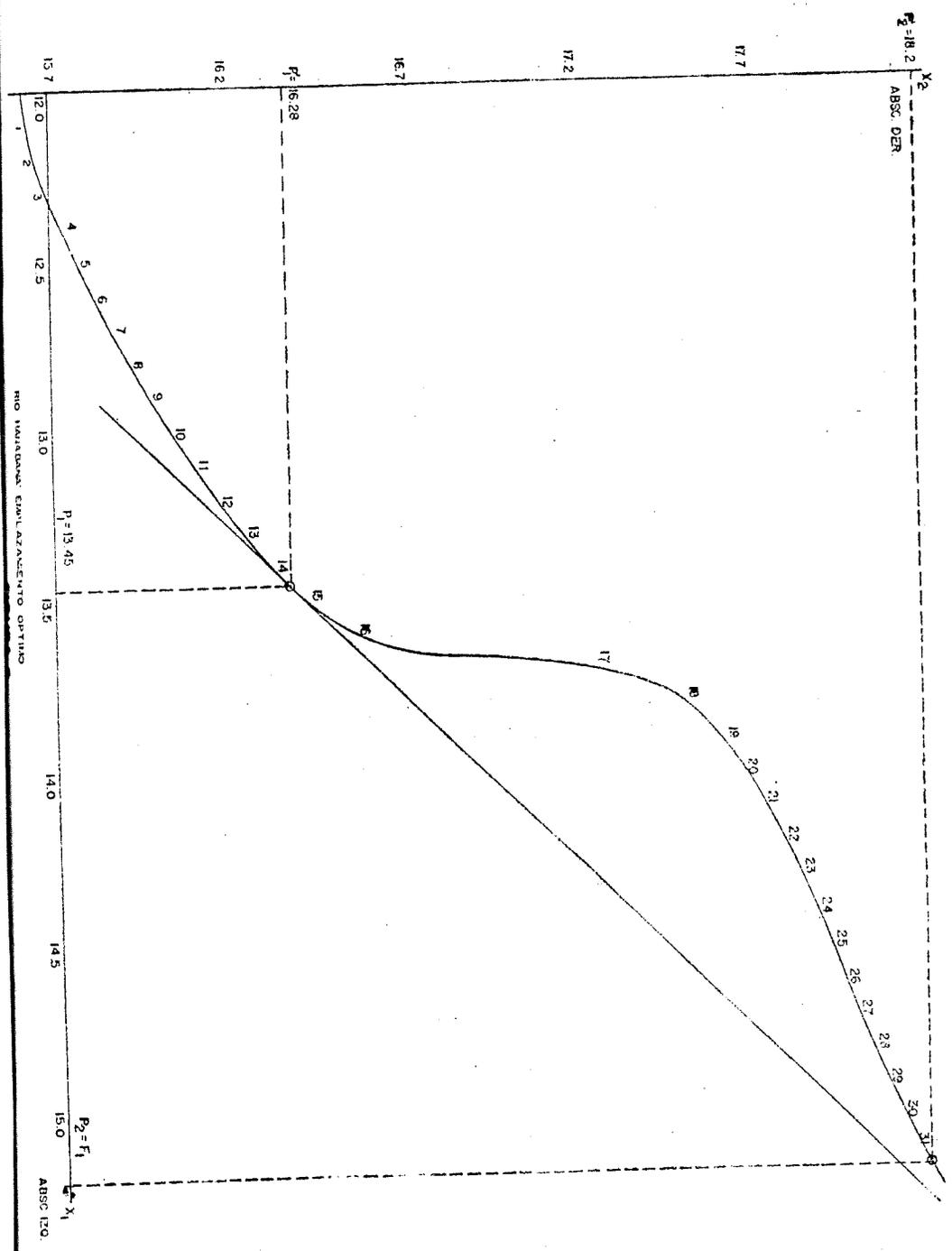
Y esta situación es susceptible de darse cuando el cauce es amplio e irregular y surgen una serie de emplazamientos mínimos en distintos puntos del mismo, de entre los cuales se desee escoger el mejor

Con esta casuística queda incluido en nuestro desarrollo teórico el segundo caso.

6. RECONOCIMIENTOS

Dado el carácter matemático del presente análisis y nuestro desconocimiento del extenso campo de la ingeniería vial, agradecemos en primer lugar al Ing. José A. Ruiz, jefe del Departamento de Computación del Grupo Vial Nacional, su asesoramiento en todas las cuestiones técnicas del mismo, así como la paciencia con que nos explicó los fundamentos

el
ra
er
in
d
H
b
C
n
s
e
H
I
1
2
3



$P_2 = 18.2$
ABSC. DER.

$P_2 = F_1$
 X_1
ABSC. EQ.

RHO INADMISSIBILI EMILIAZALEWTO OPTIMO

elementales del emplazamiento de puentes. Sin esta cooperación, que demostró una vez más las ventajas del trabajo en conjunto sobre la investigación aislada, nos hubiera sido imposible realizar este estudio.

Agradecemos igualmente al MC. Jesús Crespo, profesor del Departamento de Matemática de la Universidad de La Habana, sus sugerencias y sus acotaciones al presente trabajo, así como la revisión final del mismo.

También queremos expresar agradecimiento a nuestros compañeros del Grupo Vial Nacional —ingenieros, programadores y dibujantes— quienes de una forma u otra, con sus aportaciones, sus consejos y sus estímulos, cooperaron en este trabajo y nos alentaron a realizarlo.

BIBLIOGRAFIA

1. Apóstol, T.: "Análisis Matemático."
2. Pacho Pardo, F.: "Programa ANA-Manual de Uso."
3. — y José A. Ruiz: "Determinación por computadora del emplazamiento de los puentes y la longitud mínima de la abertura." Informe a la OCF sobre el tema de investigación VC-4-1-1973.
4. Hadley: "Non-Linear Programming."

