MUESTREOS DE ACEPTACIÓN

1. APUNTES DE CLASE

Profesor: Arturo Ruiz-Falcó Rojas

Madrid, Febrero 2006

INDICE DE CONTENIDOS

Objetivos de este tema

En este tema se pretende que alcances los siguientes objetivos:

a) Entender que el muestreo de aceptación reduce el esfuerzo de inspección.

b) Entender que el muestreo de aceptación, al tratarse de una "inspección", comporta un coste y no basta para conseguir la calidad.

c) Aprender a aplicar los distintos tipos de muestreos de aceptación.

1. PLANTEAMIENTO ESTADÍSTICO DEL PROBLEMA

Un muestreo de aceptación consiste en evaluar un colectivo homogéneo a través de una muestra aleatoria, para decidir la aceptación o el rechazo del colectivo. Por tanto es necesario tener presente en todo momento que, en un muestreo, lo que se está evaluando es toda la población y no sólo la muestra, por lo que la cuestión es si una población, con las características inferidas a partir de los datos de la muestra observada, es aceptable o no (ver Fig. 1).

Bajo el punto de vista estadístico, un muestreo de aceptación es un contraste de hipótesis en el que se evalúa una característica (parámetro de una población) a través de unos valores muestrales.

SABÍAS QUE...

La aplicación del cálculo de probabilidades a la aceptación de productos se desarrolló por el Departamento de Defensa de los EE.UU. en la II Guerra Mundial.

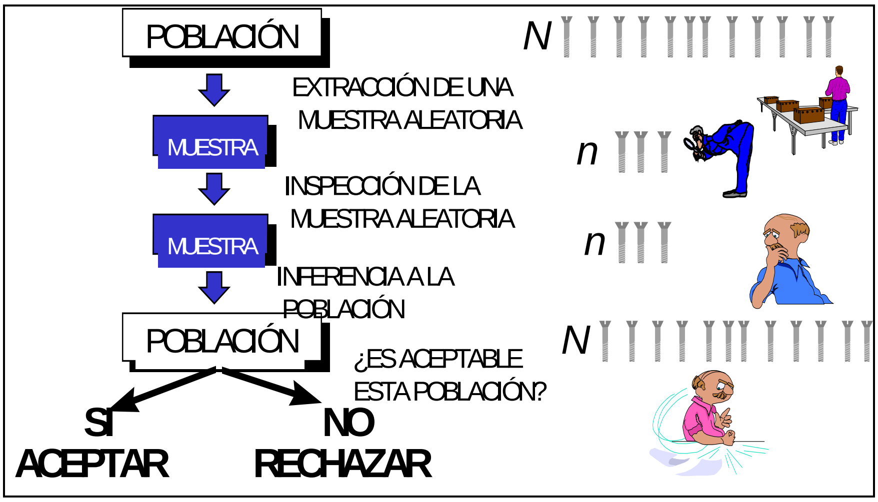

Fig. 1 Muestreos de aceptación

2. APLICACIONES DEL MUESTREO DE ACEPTACIÓN

El concepto de muestreo de aceptación va asociado a inspección, por lo que acarrea todos los problemas que supone confiar la calidad en la inspección. Sin embargo, esto no es achacable al muestreo en sí, ya que este mismo inconveniente lo tiene la inspección 100%.

La primera cuestión que se plantea ante una inspección de recepción es si se realiza un muestreo o si es preciso una inspección al 100%. Deming demuestra que la situación óptima (mínimo coste esperado) es:

Si $p < k_1 / k_2$ Aceptar sin inspección.

Si $p > k_1 / k_2$ Realizar inspección 100%.

donde:

p: Peor fracción defectuosa esperada del lote.

k_1 : Coste de inspeccionar una pieza.

k_2 : Coste de aceptar una pieza defectuosa.

De acuerdo con este criterio, el muestreo no tiene sentido. No obstante hay que tener en cuenta lo siguiente:

- **La inspección por medios destructivos no puede ser 100% por razones obvias.**
- **En el caso de lotes muy grandes la inspección 100% deja de ser 100% fiable debido a factores como la fatiga, etc. Además en lotes grandes la relación entre el tamaño de la muestra requerida y el tamaño del lote decrece, por lo que el empleo de métodos de muestreo puede estar justificado.**

3. TIPOS DE MUESTREOS DE ACEPTACIÓN

Los planes de muestreo se pueden clasificar de diversas formas:

- **De acuerdo con la naturaleza de la población base**. Pueden ser:
  - Lote aislado.
  - Lote a lote (producción uniforme de lotes).
  - Fabricaciones continuas (por ejemplo industria química, plantas embotelladoras, etc.).
- **De acuerdo con la naturaleza de la característica inspeccionada**. Pueden ser:
  - Por atributos. La característica es de tipo cualitativo (pasa /no-pasa). Una variante es la que considera “el número de defectos”, de modo que un pieza puede estar penalizada por varios defectos.
  - Por variables. La característica es de tipo cuantitativo (por ejemplo longitud, peso, etc.).
- **De acuerdo con el número de muestras a tomar**. Pueden ser:
  - Simples. Se toma una muestra con la que hay que decidir la aceptación o el rechazo.
  - Dobles. Se toman hasta dos muestras con las que hay que decidir la aceptación o el rechazo. Es posible aceptar o rechazar solo con la primera muestra si el resultado es muy bueno o muy malo. Si es un resultado intermedio, se extrae una segunda muestra. En principio el tamaño de las dos muestras puede ser diferente.
  - Múltiple. Conceptualmente es igual al muestreo doble pero en este caso se extrae hasta n muestras diferentes.
  - Secuencial. En este caso se van extrayendo los elementos uno a uno y según los resultados que se van acumulando de elementos aceptados y rechazados, llega un momento en el que se tiene información suficiente para aceptar o rechazar el lote.

4. MUESTREOS POR ATRIBUTOS.

4.1. GENERALIDADES

El muestreo por atributos se puede aplicar a lotes aislados o series homogéneas de lotes. En el primer caso la población es finita y se rige por la distribución hipergeométrica (muestreo de tipo A), aunque para lotes grandes se puede aproximar por la binomial. En el segundo caso se supone la población compuesta de infinitos elementos y por tanto se rige por la distribución binomial (muestreo de tipo B). En el caso que el muestreo sea por número de defectos, la función a aplicar es la de Poisson, independientemente que se trate de un lote aislado o una serie de lotes.

4.2. CURVA DE OPERACIÓN (CO)

Un plan de muestreo se caracteriza por su CURVA DE OPERACION (ver Fig. 2). En el eje de abscisas OX se representa la fracción defectuosa p del lote a inspeccionar (o el número de defectos medio μ en el caso de contabilizar defectos). En el eje de ordenadas OY se representan las probabilidades de aceptación de los lotes de esas características. Evidentemente *P(0) = 1* y *P(1) = 0.*

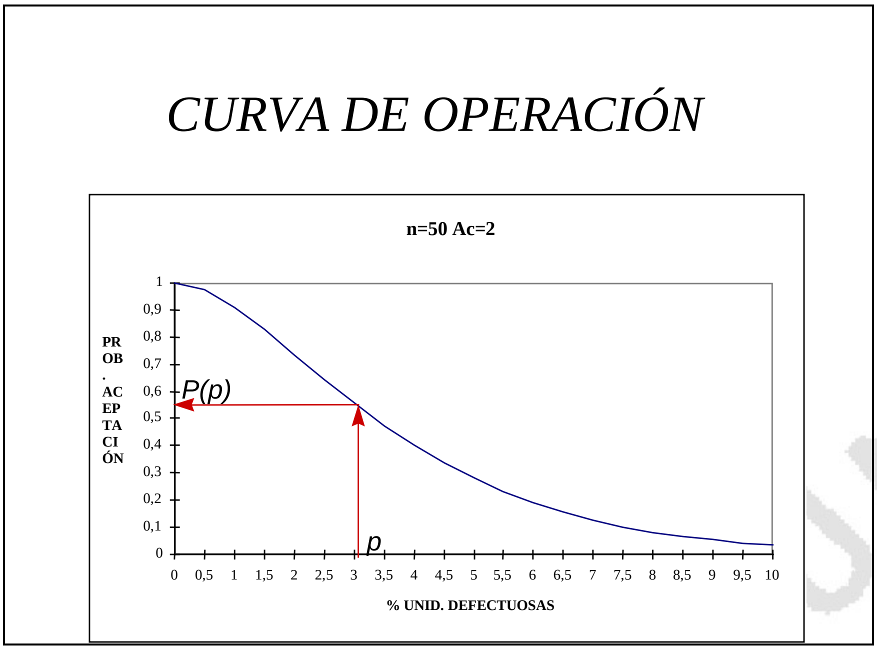

Fig. 2 Curva de operación de un plan de muestreo.

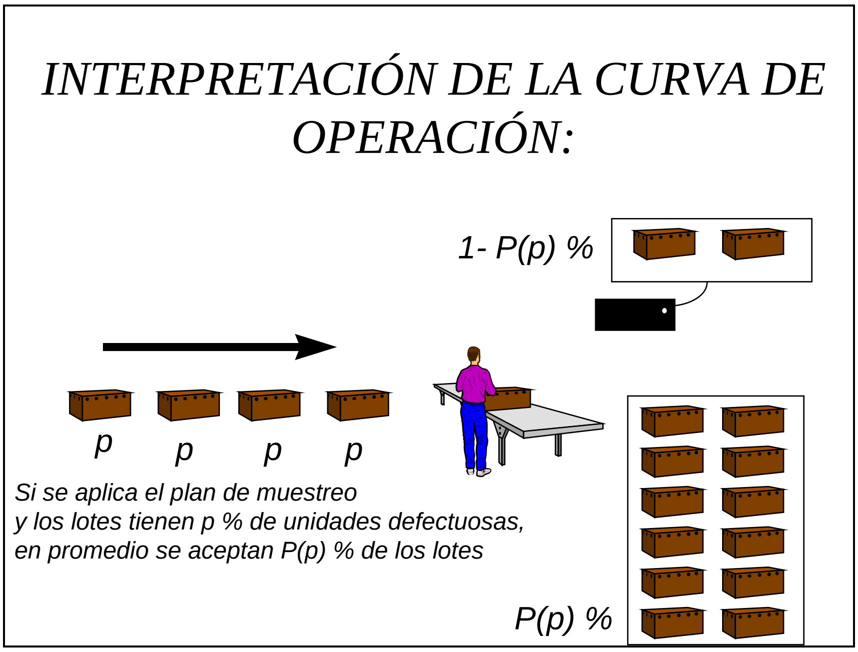

Fig. 3 Interpretación del significado de la Curva de Operación

En el caso de planes de muestreos simples, la ecuación de la CO se calcula simplemente a partir de la función de distribución aplicable. Por ejemplo, supongamos que se quiere calcular la CO de un plan de muestreo en el que se toman muestras de 50 unidades y se rechaza si hay más de un elemento no conforme en la muestra. Se supone un muestreo lote a lote. En este caso resulta aplicable la distribución binomial,

$$P(X) = \sum_{i=0}^{x} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{(n-i)}$$

Luego la ecuación de la curva de operación sería en este caso

$$P(p) = \sum_{i=0}^{1} \binom{50}{i} p^i (1-p)^{(50-i)}$$

En el caso de muestreos dobles o múltiples, el cálculo anterior se complica ligeramente dependiendo de lo complejo que sean los criterios de aceptación, pero el fundamento es, naturalmente el mismo.

4.3. NIVEL DE CALIDAD ACEPTABLE (NCA) Y CALIDAD LÍMITE (CL)

En una curva de aceptación se encuentran los siguientes puntos característicos (ver Fig. 4):

1. NCA (NIVEL DE CALIDAD ACEPTABLE). En inglés AQL (Acceptable Quality Level). Es el valor de p (c en el caso de defectos) que tiene una probabilidad de aceptación de 0.95. La probabilidad de rechazo de un lote con estas características, $\alpha = 0.05$, se denomina **riesgo del fabricante**.
2. CL (CALIDAD LIMITE). En inglés QL (Quality Limit) o LTPD (Lot Tolerance Percent Defective). Es el valor de p (c en el caso de defectos) que tiene una probabilidad de aceptación de 0.10. La probabilidad de aceptación de un lote con estas características, $\beta = 0.10$, se denomina **riesgo del consumidor**.

Las curvas CO tienen las siguientes propiedades:

- **Las curvas CO correspondientes a números de aceptación Ac=0 son cóncavas. En caso contrario son inicialmente convexas, después tienen una inflexión para finalizar de forma cóncava.**
- **En el entorno del NCA, la curva tiene una pendiente mayor cuanto mayor es el tamaño de la muestra (mejor discriminación) .**
- **Si se mantiene constante el tamaño de la muestra pero se aumenta el número de aceptación Ac, la curva se desplaza hacia la derecha.**
- **En el caso de atributos, el problema de hallar la curva CO que pase por un NCA y un CL dados no siempre tiene solución exacta ni siquiera en el caso de muestreo simple debido a la restricción de que tanto el tamaño de la muestra como el número de aceptación han de ser enteros. En el párrafo 4.4 se describe un procedimiento aproximado.**

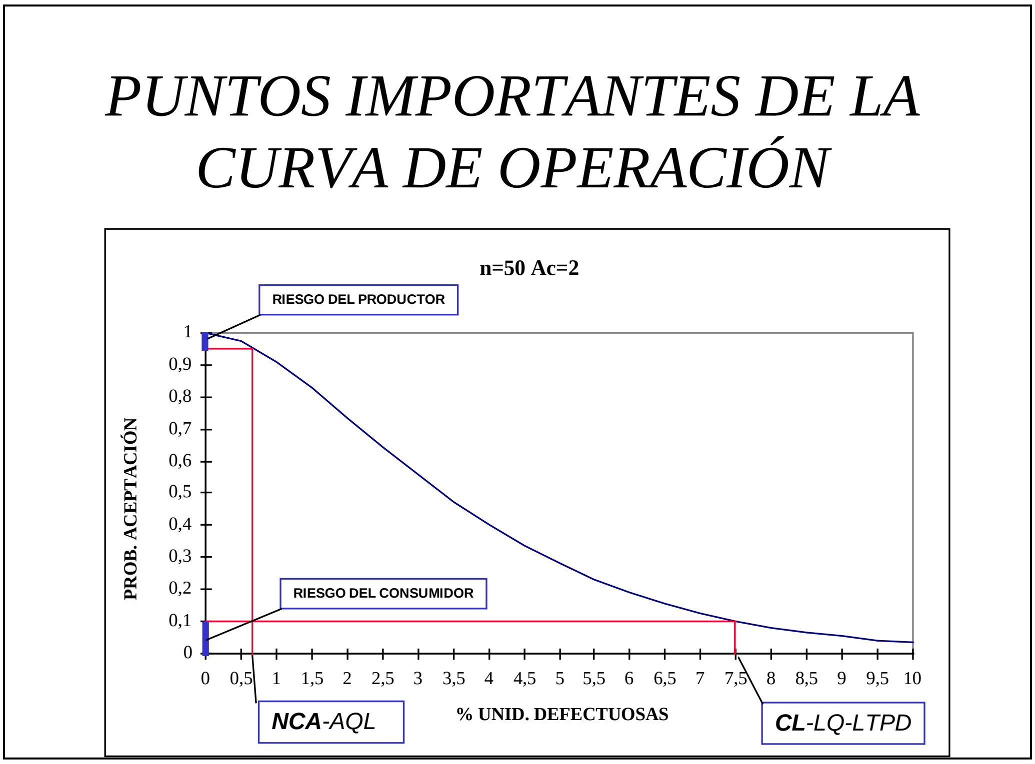

Fig. 4 Puntos característicos de la Curva de Operación

ACTIVIDAD 1:
Dado un plan de muestreo con tamaño de muestra n=50 y número de aceptación Ac=0, hallar su AQL.

Tiempo estimado de desarrollo: 5 minutos
Recurso(s) Utilizado(s): Conceptos de probabilidades y distribuciones básicas.
A quién debe enviarse la actividad: Autocomprobación. Si el alumno tiene dificultades debe repasar los conceptos de probabilidades, la distribución binomial y la de Poisson (ver anexo I)
Formato de envio: No aplicable.
Extensión: No aplicable.
Respuesta del tutor: No aplicable.

.**Responde brevemente a la siguiente pregunta:**

¿Qué distribución de probabilidad de ha aplicado y porqué?

¿Qué ocurre si Ac = 1?

4.4. PROCEDIMIENTO APROXIMADO PARA DETERMINAR UN PLAN DE MUESTREO QUE SATISFAGA UN NCA Y UNA CL FIJADA

Supongamos que se quiere determinar un plan de muestreo que satisfaga NCA = 0.01 y CL=0.06. Es decir, P(aceptar un lote p=0.01)=0.95 y P(aceptar un lote p=0.06)=0.10. Si el tamaño de la muestra es suficientemente grande y p pequeño (tal que pn >1 y p <0.10) se puede aproximar la distribución binomial por una distribución de Poisson:

$$P(n*NCA) = \sum_{i=0}^{Ac} \frac{(n*NCA)^i}{i!} e^{-n*NCA} = 0.95$$

$$P(n*CL) = \sum_{i=0}^{Ac} \frac{(n*CL)^i}{i!} e^{-n*CL} = 0.10$$

De manera general, la resolución de este sistema de ecuaciones en el que una de las incógnitas está en el índice sumatorio, es complicada. Para cada valor del número de aceptación Ac, existe una solución única de (n*NCA) y (n*CL). En la tabla siguiente se recogen las soluciones para algunos valores de Ac:

Ac	P(n*NCA) = 0.95	P(n*CL) = 0.10	CL / NCA
0	n*NCA =0.051	n*CL =2.303	44.89
1	n*NCA=0.352	n*CL =3.881	11.02
2	n*NCA=0.817	n*CL =5.314	6.50
3	n*NCA=1.360	n*CL =6.678	4.91

Tabla 1

La relación entre CL y NCA da una idea de la pendiente que ha de tener la curva de operación. En este caso CL / NCA 0.06/ 0.01 = 6 y por lo tanto la familia de curvas que más se aproxima es la que corresponde a Ac = 2. Una vez fijado Ac, resultan dos ecuaciones con una incógnita. En este caso:

$$0.01n = 0.817 \Rightarrow n = 81.7 \approx 82$$

$$0.06n = 5.314 \Rightarrow n = 88.6 \approx 89$$

El plan de muestreo n=82 y Ac = 3 tiene un NCA de 0.01 y una CL próxima a 0,06, mientras que el plan de muestreo n=89 y Ac = 3 tiene una CL = 0.06 y un NCA próximo a 0.01. A partir de ahí se puede optar por tomar la solución más conservadora (tamaño de muestra mayor n= 89) o una solución de compromiso (tamaño de muestra medio n =85.

4.5. CURVA DE CALIDAD DE SALIDA MEDIA

Si se aplica un plan de muestreo a una serie de lotes, de modo que aquellos que se rechazan se inspeccionan al 100%, la CALIDAD MEDIA de SALIDA (CSM) es:

$$CSM = Pa(p)p + (1 - Pa(p))0 = Pa(p)p$$

La CSM en inglés se denomina Average Outgoing Quality (AOQ) y el valor depende de p. El máximo es el LIMITE DE LA CALIDAD DE SALIDA MEDIA (LCSM), en inglés Average Outgoing Quality Limit (AOQL). En la Fig. 5 se ha representado esta curva.

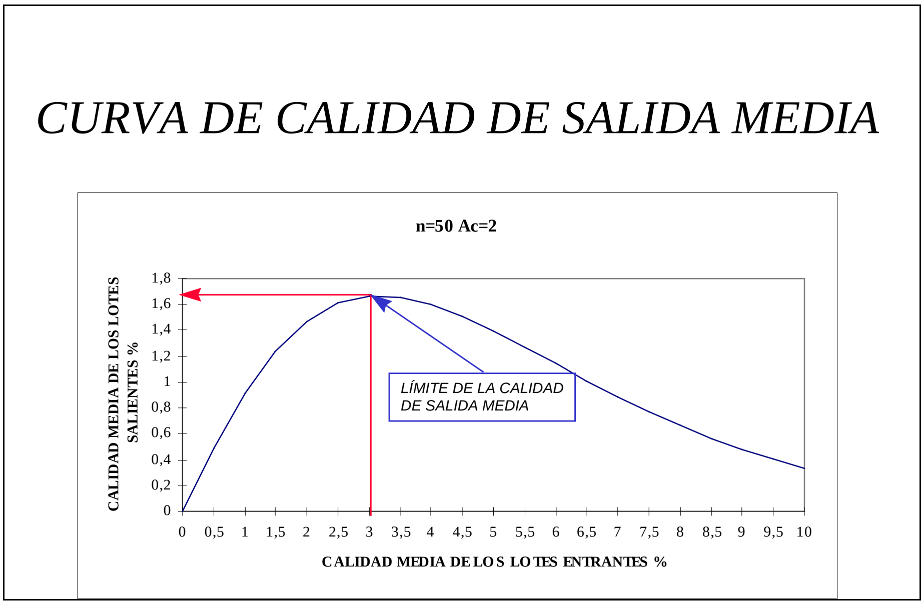

Fig. 5 Curva de Calidad de Salida Media

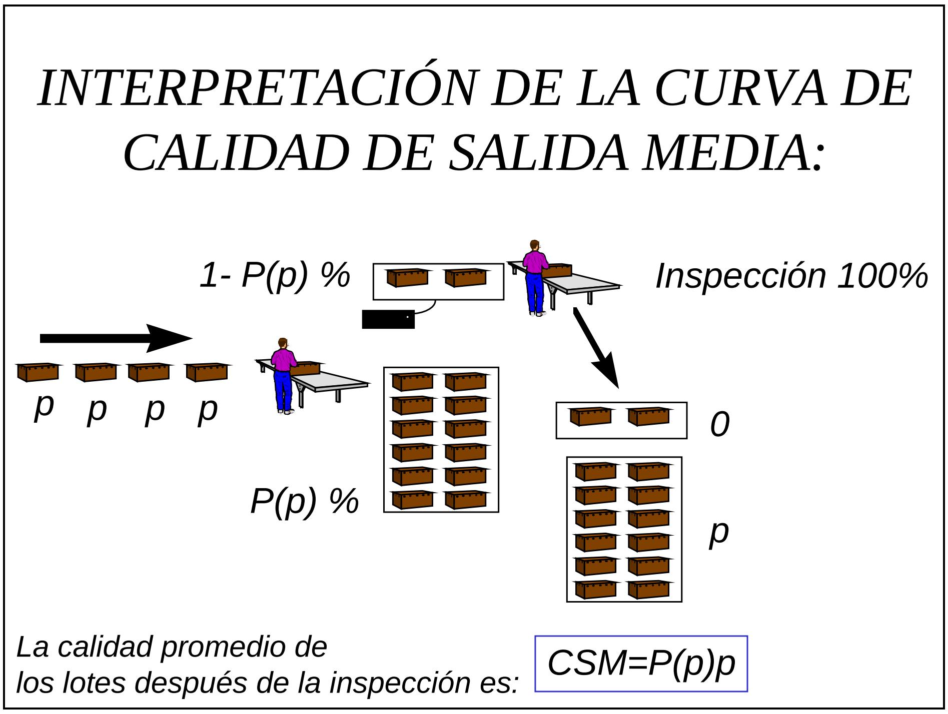

Fig. 6 Interpretación de la Curva de Calidad de Salida Media

Otro parámetro importante a la hora de decidir cuál es el plan de muestreo más apropiado es el TAMAÑO DE MUESTRA MEDIO, en inglés Average Sample Number (ASN). Evidentemente en planes simples, el ASN coincide con la muestra del lote, pero para planes dobles o múltiples este valor varía con la calidad de los lotes inspeccionados. Si ésta es muy buena o muy mala, los lotes se aceptarán / rechazarán generalmente sin necesidad de coger una segunda muestra y el ASN será pequeño. Si los lotes tienen una calidad intermedia, entonces frecuentemente se cogerá una segunda muestra y el ASN será grande.

4.6. MUESTREOS LOTE A LOTE: MIL-STD-105E.

Este plan de muestreo es posiblemente el que ha tenido mayor difusión. Ha sido adoptado con pequeñas variaciones por casi todos los cuerpos de normas importantes (ANSI, ISO, BS, JIS, UNE, etc.). La revisión anterior (MIL-STD-105D) estuvo en vigor más de 25 años y la primera revisión data de 1950. La revisión actual no incluye ningún cambio en los fundamentos estadísticos, pero si actualiza su aplicación contractual.

El contenido de la norma es el siguiente:

- Los planes de muestreo de MIL-STD-105E se basan en el NCA, que deberá fijarse entre cliente y proveedor. En principio estos planes están pensados para inspección lote a lote aunque también se puede utilizar para el caso de lotes aislados; en este caso es necesario especificar cuál es la CL máxima que se admite.
- Existen tres niveles ordinarios de inspección, niveles I, II, y III, y otros cuatro especiales, niveles S-1, S-2, S-3 y S-4, que se utilizan en caso de ensayos destructivos o de inspecciones muy costosas. Estos niveles van en función de la complejidad y la responsabilidad del producto. Cuanto más alto es el nivel, mayor es el tamaño de la muestra y aumenta la discriminación del plan de muestreo. Si no se indica otra cosa se toma el nivel II.
- Existen tres tipos de planes: simples, dobles y múltiples, cuya elección queda a cargo del inspector que aplica la norma.
- Como se ha dicho anteriormente, esta norma está diseñada para series de lotes. Existen por tanto tres niveles de muestreo distintos según haya sido la historia de los lotes anteriores:
    - Inspección Rigurosa.
    - Inspección Normal.
    - Inspección Reducida.

La inspección comienza en normal. Si dos de los 5 últimos lotes se han rechazado debe pasarse a rigurosa. Si estando en rigurosa se aceptan 5 lotes consecutivos, entonces debe pasarse a normal. Para pasar de normal a reducida es necesario que lo acepte el cliente, que los últimos 10 lotes (o más según los casos ver TABLA VIII) hayan resultado aceptables, que el número de componentes defectuosos no supere el marcado por la TABLA VIII y que la fabricación siga uniforme. (ver Fig. 7).

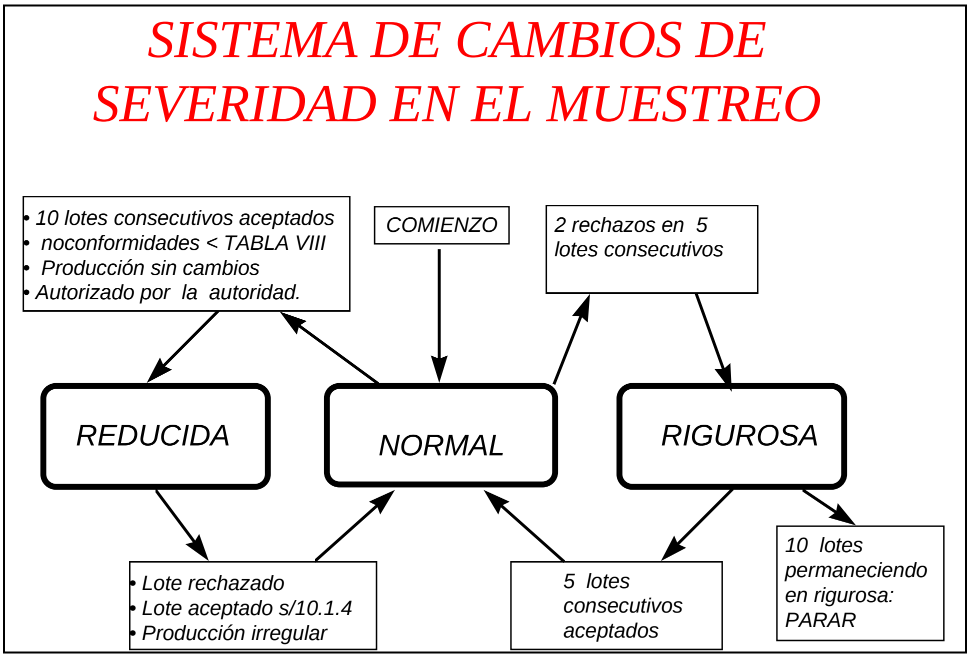

Fig. 7 Modificación de la inspección en MIL-STD-105E

La mecánica para la utilización de esta norma es la siguiente:

1. Fijación del NCA y nivel de inspección (por ejemplo NCA=0.65 Nivel II). Dato: tamaño del lote (por ejemplo 300).
2. Búsqueda de la letra-código en la Tabla I. En este caso resulta ser la H.
3. A continuación, si se desea un plan simple se irá a las Tablas II, si doble a las Tablas III y si múltiple a las Tablas IV. En el ejemplo busquemos el plan correspondiente a simple en inspección normal:
4. Tabla II-A: El tamaño de la muestra es 50 pero se observa que la casilla correspondiente al número de aceptación está ocupada por una flecha que nos lleva hasta el plan: muestra=80, Ac=1 y Re=2 . Si se tratara de un lote aislado sería necesario comprobar que la CL es aceptable. Ello se puede comprobar en este caso utilizando la Tabla X-J, en la que se lee CL=5%.

4.7. OTROS PLANES DE MUESTREO POR ATRIBUTOS DE USO CORRIENTE.

Además del MIL-STD-105E, son de uso corriente los siguientes planes:

Sistema Philips.

Se basa en curvas CO que pasan por el punto de indiferencia (fracción defectuosa que tiene igual probabilidad de ser aceptada que rechazada). Este punto se acuerda entre proveedor y cliente. Los planes dan el tamaño de la muestra según el tamaño del lote y el número máximo de unidades defectuosas admitido. Los planes son simples para lotes inferiores a 1000 unidades y dobles para lotes mayores. La segunda muestra es de doble tamaño que la primera.

Tablas de Dodge-Romig.

Las tablas Dodge-Romig contienen dos juegos distintos. El primero de ellos utiliza la CL y por lo tanto es apropiado para lotes aislados. El segundo de ellos utiliza el LIMITE DE LA CALIDAD MEDIA DE SALIDA y proporciona el plan cuya inspección media total es mínima. Para la aplicación de estas tablas se precisa conocer aproximadamente la fracción defectuosa con la que se fabricaron las piezas.

5. MUESTREOS POR VARIABLES

5.1. GENERALIDADES

La teoría expuesta en el apartado anterior sobre curvas de operación es trasladable fácilmente al caso de que la característica de calidad tenga un carácter cuantitativo (muestreos por variables) y se contraste si la producción supera un determinado nivel de fracción defectuosa, es decir, verificar si el porcentaje de piezas no conformes supera un porcentaje prefijado.
El muestreo por variables presenta algunas particularidades como por ejemplo que el problema de encontrar el plan de muestreo que pase por el NCA y CL tiene siempre solución.
En general el muestreo por variables tiene la ventaja de precisar tamaños de muestra menores que su equivalente por atributos. Las contrapartidas son:

1. En general es más costoso medir un componente que realizar una inspección por atributos.
2. Lleva consigo la servidumbre de recogida de datos y cálculos.
3. En caso de que un elemento esté definido por varias características variables, es necesario realizar varios planes de muestreo simultáneamente para cada una de las características, mientras que en el caso de atributos es posible globalizarlo en uno.

Indudablemente estos inconvenientes pasan a tener una importancia menor con sistemas de inspección automáticos.

5.2. PLANTEAMIENTO ESTADÍSTICO

El muestreo por variables requiere que las características a inspeccionar estén distribuidas según una ley normal y se trata de estimar la media poblacional a través de la media muestral.

Pueden presentarse los casos siguientes:

- σ conocida y un solo límite de tolerancia.
- σ conocida y dos límites de tolerancia (tolerancias bilaterales).
- σ desconocida y un solo límite de tolerancia.
- σ desconocida y dos límites de tolerancia (tolerancias bilaterales).

El hecho de que se conozca o no la σ determina la distribución estadística a emplear en la estimación de la media (ver Tabla 2).

Por otra parte, si las piezas tienen tolerancias bilaterales implica que deben considerarse las dos colas de la distribución, mientras que si hay un solo límite debe considerarse una sola cola.

PARÁMETRO	ESTADÍSTICO	DISTRIBUCIÓN
μ (σ conocido)	$\dfrac{(\bar{x}-\mu)}{\sigma/\sqrt{n}}$	$N(0,1)$
μ (σ desconocido)	$\dfrac{(\bar{x}-\mu)}{s/\sqrt{n}}$, donde $s=\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}}$	t_{n-1}

Tabla 2

SIGMA CONOCIDA Y UN SOLO LÍMITE DE TOLERANCIA

De manera análoga al muestreo por atributos, se define el NCA como aquella fracción defectuosa con la que un lote tiene el 95% de probabilidades de ser aceptado por el plan de muestreo. En el caso de que exista un solo límite de tolerancia, la distancia de la media del lote y la tolerancia deberá ser tal que (ver Fig. 8):

$$P(z \geq z_T) = AQL; \quad z_T = \frac{T-\mu}{\sigma}; \quad \mu = T - z_T\sigma$$

Si la media del lote es μ (y por tanto la fracción defectuosa es igual al NCA), el concepto de NCA requiere fijar un nivel crítico k, tal que:

$$P(\frac{\mu - \bar{x}}{\sigma/\sqrt{n}} \geq z_{1-\alpha}) = 0.95; \quad z_{1-\alpha} = z(0.95) = 1.65$$

Lo que equivale a que la media muestral será inferior a (ver Fig. 8):

$$\bar{x} \leq \mu + z(0{,}95)\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = T - z_T\sigma + z(0{,}95)\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = T - \left(z_T - \frac{z(0{,}95)}{\sqrt{n}}\right)\sigma = T - k\sigma$$

Si la media muestral es superior a ese valor, entonces se puede rechazar el lote con un nivel de significación α =100 – 95 = 5%.

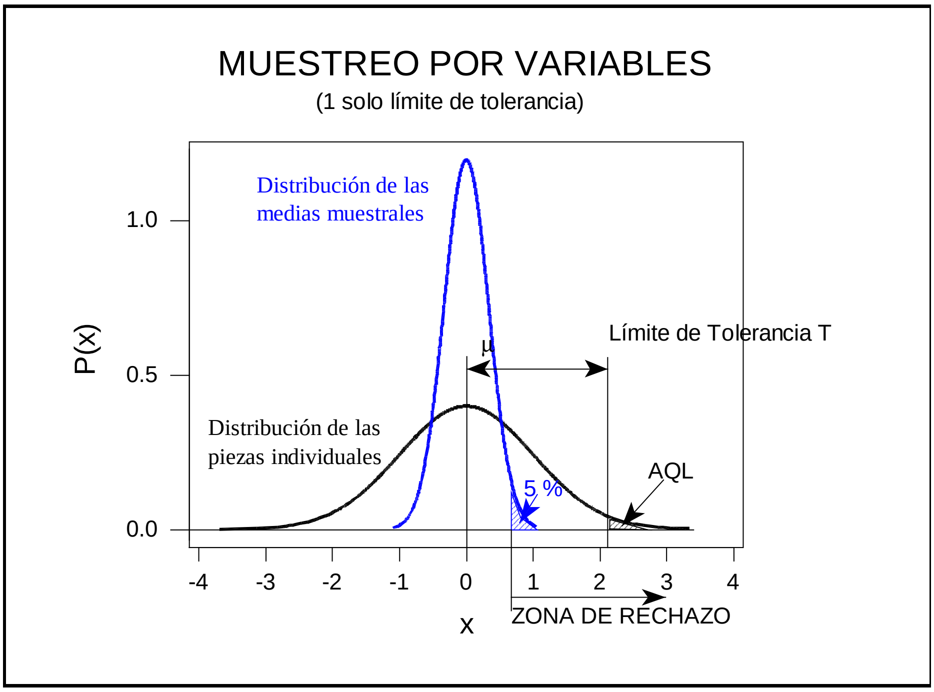

Fig. 8 Un solo límite de tolerancia

Si se fijan dos puntos de la curva de operación (por ejemplo el NCA y la CL), el cálculo del tamaño de la muestra requerido n, y el factor k se calcula de manera sencilla:

$$k = z_{AQL} - \frac{z(0.95)}{\sqrt{n}}$$

$$k = z_{CL} - \frac{z(0.10)}{\sqrt{n}}$$

de aquí resulta:

$$n = \left(\frac{z(0.95) - z(0.10)}{z_{AQL} - z_{CL}} \right)^2$$

$$k = \frac{- z_{AQL} z(0.10) + z_{CL} z(0.95)}{z(0.95) - z(0.10)}$$

SIGMA CONOCIDA Y DOS LÍMITES DE TOLERANCIA

Pueden darse tres casos:

a) Qué las tolerancias estén tan próximas de modo que del conocimiento de la fracción defectuosa y σ se deduzca que el lote no cumple la especificación sin necesidad de tomar ninguna muestra:

$$P(-\frac{T_s - T_i}{2\sigma} < z < \frac{T_s - T_i}{2\sigma}) > p$$

b) Qué las tolerancias estén muy separadas (T_s- T_i > 3σ). En este caso el problema se reduce al caso de un solo límite de tolerancia considerando solo la tolerancia más próxima.

c) El caso intermedio, en el que parte de la fracción defectuosa corresponde a cada una de las colas. En efecto, si p = p_1+ p_2 es la fracción defectuosa, la misma podrá obtenerse con un lote centrado en μ_1 ó μ_2 (ver Fig. 9). Sobre esa figura se indican las regiones de aceptación y rechazo de k.

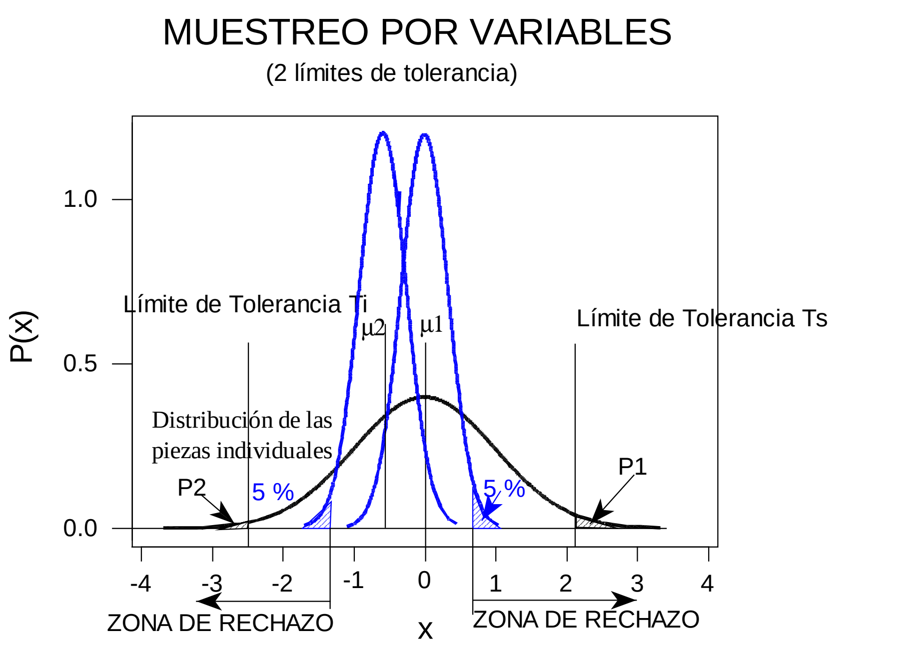

Fig. 9 Dos límites de tolerancia

En este caso el cálculo de n y k que satisfagan un NCA y una CL prefijados son:

NCA = $p_1 + p_2$

$$n = \left(\frac{z(0.95) - z(0.10)}{z_{P1} - z_{CL}} \right)^2$$

$$k = \frac{-z_{P1} z(0.10) + z_{CL} z(0.95)}{z(0.95) - z(0.10)}$$

SIGMA DESCONOCIDA

En este caso, la t de Student nos permite realizar un contraste de la media pero no nos permite fijar una fracción defectuosa del lote.
Una vez obtenida una muestra de tamaño n, con una media y una desviación típica muestral, el problema es determinar k tal que si $\frac{T - \bar{x}}{s} \leq k$ se rechace el lote con un nivel de significación prefijado.
$\bar{x} - ks$ es una variable aleatoria cuya media es μ - $k\sigma$ y su varianza es:

$$Var(\bar{x} - ks) = Var(\bar{x}) + k^2 Var(s) = \frac{\sigma^2}{n} + k^2 Var(s)$$

Por otra parte:

$$(n-1)\frac{s^2}{\sigma^2} \propto \chi^2_{n-1}; \quad s^2 \propto \frac{\sigma^2}{(n-1)}\chi^2_{n-1}; \quad \mathrm{Var}(s^2) = \frac{\sigma^4}{(n-1)^2} Var(\chi^2_{n-1}) = \frac{\sigma^4}{(n-1)^2} 2(n-1) = \frac{2\sigma^4}{(n-1)}$$

teniendo en cuenta que:

$$\sigma_y = \left| \frac{dy}{dx} \right|_{x=\bar{x}} \sigma_x$$

Entonces:

$$\sigma_s = \frac{1}{2\sigma}\sqrt{\frac{2\sigma^4}{n-1}} = \frac{\sigma}{\sqrt{2(n-1)}}; \; Var(s) = \frac{\sigma^2}{2(n-1)}$$

$$Var(\bar{x} - ks) = \frac{\sigma^2}{n} + \frac{\sigma^2}{2(n-1)}k^2 \approx \frac{\sigma^2}{n}\left(1 + \frac{k^2}{2}\right)$$

Con lo que se deduce que el hecho de desconocer la varianza del lote, penaliza el tamaño de la muestra requerido en un factor $\left(1 + \frac{k^2}{2}\right)$. De manera que, si se fija un NCA y una CL, el plan de muestreo requerido es (caso de un límite de tolerancia):

$$k = \frac{-z_{AQL}z(0.10) + z_{CL}z(0.95)}{z(0.95) - z(0.10)}$$

$$n = \left(1 + \frac{k^2}{2}\right)\left(\frac{z(0.95) - z(0.10)}{z_{AQL} - z_{CL}}\right)^2$$

En el caso de dos límites de tolerancia sería necesario realizar las mismas correcciones que en el caso de que la que la σ sea conocida.

5.3. MUESTREOS LOTE A LOTE SEGÚN MIL-STD-414

La MIL-STD-414 está estructurada de una forma parecida a la MIL-STD-105E. Utiliza el concepto de NCA, cuenta con cinco niveles de inspección (I - V) y niveles de inspección <u>normal, reducida y rigurosa.</u> Si no se indica otra cosa el nivel a aplicar es el IV.
Consta a su vez de cuatro secciones A, B, C y D.

Sección A Descripción General.
Sección B Varianza desconocida. Método de la desviación típica muestral.
 Parte I Un solo límite especificado.
 Parte II Dos límites especificados (Mismo NCA / Distinto NCA).
 Parte III Estimación de la media del proceso y criterios de cambio Rigurosa - Normal - Reducida.
Sección C Varianza desconocida. Método del rango muestral.
 Parte I Un solo límite especificado.
 Parte II Dos límites especificados (Mismo NCA / Distinto NCA).
 Parte III Estimación de la media del proceso y criterios de cambio Rigurosa - Normal - Reducida.
Sección D Varianza conocida.
 Parte I Un solo límite especificado.

Parte II Dos límites especificados. (Mismo NCA / Distinto NCA).
Parte III Estimación de la media del proceso y criterios de cambio Rigurosa - Normal - Reducida.

La mecánica es la siguiente:

1. Fijación del NCA y nivel de inspección (por ejemplo NCA=0.65 Nivel IV). Dato: tamaño del lote (por ejemplo 300). Supongamos el caso de σ desconocida, que la especificación marca un solo límite (por ejemplo el superior U) y que se quiere utilizar el método de la desviación típica muestral.
2. Comprobar en la Tabla A-1 el NCA equivalente que hay que utilizar. Búsqueda de la letra - código en la Tabla A-2. En este caso resulta ser la H. Si se trata de un lote aislado sería necesario comprobar que la CL es aceptable. Ello se puede comprobar en este caso utilizando la Tabla A-3.
3. A continuación depende si se desea utilizar la forma 1 o la forma 2. La forma 1 se basa en comparar el valor obtenido de z con el valor k que deja una cola de la normal igual a la fracción defectiva admisible M. Es decir:

$$z = \frac{U - m}{s} \qquad P(x > k) = M$$

   La forma 2 se basa en comparar la fracción defectiva del lote P_u con la fracción defectiva admisible M. P_u se calcula:

$$P(x > z) = P_u$$

   Si se sigue la forma 1 se va a la Tabla B-1 y se halla el tamaño de la muestra (n=20 en este caso) y k=1,96. Si se sigue la forma 2 se va a la Tabla B-3 y se halla el tamaño de la muestra (que naturalmente coincide con la calculada de la otra forma) y M=2,05.
4. Se calcula el valor de m (media muestral) y de s, desviación típica muestral:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

5. Se calcula el valor de:

$$z = \frac{U - m}{s}$$

Si se está utilizando la forma 1 basta comparar z con k. Si z > K se acepta el lote, si z < k se rechaza. Si se utiliza la forma 2 se halla la fracción defectiva estimada del lote P_u utilizando la Tabla B-5 y entrando con el valor hallado de z y el tamaño del lote, si $P_u < M$ se acepta.

Si la especificación hubiese puesto dos límites, U y L, solo se puede utilizar la forma 2. En este caso el criterio de aceptación es el siguiente:

i) En ambos límites se ha impuesto el mismo NCA.

Si $P_u + P_l > M$ Rechazar

Si $P_u + P_l < M$ Aceptar

ii) Distintos NCA en U y L. Para aceptar en este caso es necesario que simultáneamente se den las siguientes circunstancias:

$P_u < M_u$, $P_l < M_l$, $P_u + P_l < \max(M_u, M_l)$

6. MUESTREOS SECUENCIALES (CONTINUOS)

Existen dos variantes. La primera se aplica a lotes terminados de los que se van extrayendo muestras hasta que se acepta o rechaza el lote. Este tipo de muestreo se aplica sobre todo en ensayo de aceptación de fiabilidad.
El fundamento de estos planes se esquematiza en la Fig. 10.

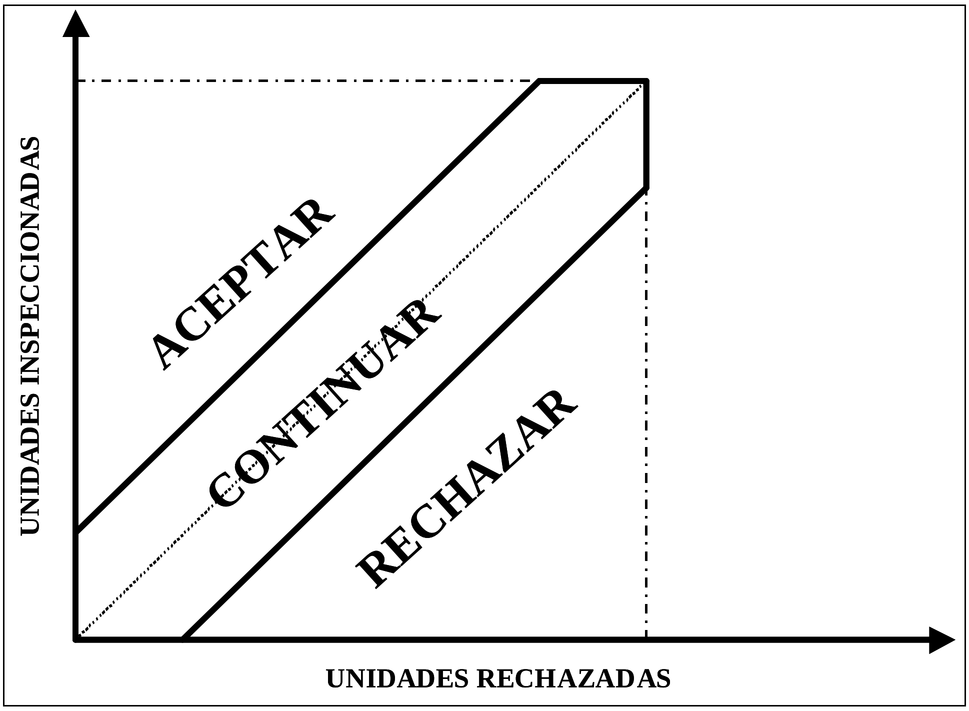

Fig. 10: Muestreos secuenciales o contínuos

La segunda variante se utiliza para fabricaciones continuas. El muestreo continuo es la inspección o ensayo de productos a medida que pasan por un puesto de inspección (producto móvil). Para que se pueda aplicar es preciso:

1. Inspección sencilla y rápida.
2. Disponibilidad de espacio y mano de obra para poder afrontar periodos de inspección 100%.
3. Calidad de producción estable.
4. Inspección no destructiva.

Las condiciones anteriores hacen que las posibilidades de aplicar estos planes en muestreos de aceptación sean reducidas.

La norma más conocida de muestreos secuenciales es la MIL-STD-1235, que ha adoptado una estructura que recuerda a la MIL-STD-105. Está compuesta por los siguientes planes:

Plan de Muestreo	Características	Parámetros entrada	Datos salida	Observaciones
CSP-1	Alternan secuencias de inspección 100% con muestras periódicas aleatorias, de manera indefinida. Requiere restaurar la inspección 100% cuando se detecta una no conformidad.	Letra Código AQL	I, F	Cambios bruscos en la demanda de necesidad de inspectores.
CSP-F	Variación de CSP-1 aplicable a lanzamientos de pocas piezas. Consiste en dividir el número de unidades a fabricar en grupos más pequeños, por lo tanto permite prescindir de la inspección 100% tras inspeccionar un número más reducido de unidades.	Letra Código AQL N	I, F	Num. Unidades 100% más reducido que si se considerara un solo grupo.
CSP-2	Modificación del CSP-1 Requiere restaurar la inspección 100% cuando se detectan dos no conformidades separadas menos de cierto número de muestras.	Letra Código AQL	I, F, S	Reduce el riesgo de volver a inspección 100%
CSP-T	Requiere restaurar la inspección 100% cuando se detecta una no conformidad y permite reducir la frecuencia de muestreo si los resultados son buenos.	Letra Código AQL	I, F, S	Recomendable si la fracción defectuosa es muy baja
CSP-V	Permite reducir el número de unidades a inspeccionar al 100% para reinstaurar la inspección por muestreo.	Letra Código AQL	I, X, F, S	Recomendable si la fracción defectuosa es muy baja.

F	Fracción inspeccionada aleatoriamente
I	Número de unidades a inspeccionar al 100% para pasar a inspeccionar por muestreo (Clearance number)
X	Número total de unidades a inspeccionar al 100% poder restaurar la inspección por muestreo (en muestreos CSP-V)
S	Número máximo de unidades que se pueden inspeccionar sin salir de inspección 100%

Tabla 3: Características de los planes de muestreo

De manera similar a MIL-STD-105, los planes de muestreo se caracterizan por un AQL. Sin embargo, en este caso el AQL sirve únicamente para clasificar los distintos planes y no tienen ningún significado especial. La Tabla 4 indica las letras código que se permiten según el del número de unidades a producir. Para especificar un plan de muestreo es necesario indicar la letra código (con las restricciones impuestas por la Tabla 4) y el tipo de plan de muestreo CSP-1, CSP-F, CSP-2, CSP-T o CSP-V.

Número de unidades en el intervalo de producción	Letras Códigos permitidas
2 – 8	A, B
9 – 25	A hasta C
26 – 90	A hasta D
91 – 500	A hasta E
501 – 1.200	A hasta F
1201 – 3.200	A hasta G
3201 – 10.000	A hasta H
10.001 – 35.000	A hasta I
35.001 – 150.000	A hasta J
150.001 en adelante	A hasta K

Tabla 4 Letras códigos permitidas en función del número de unidades a producir

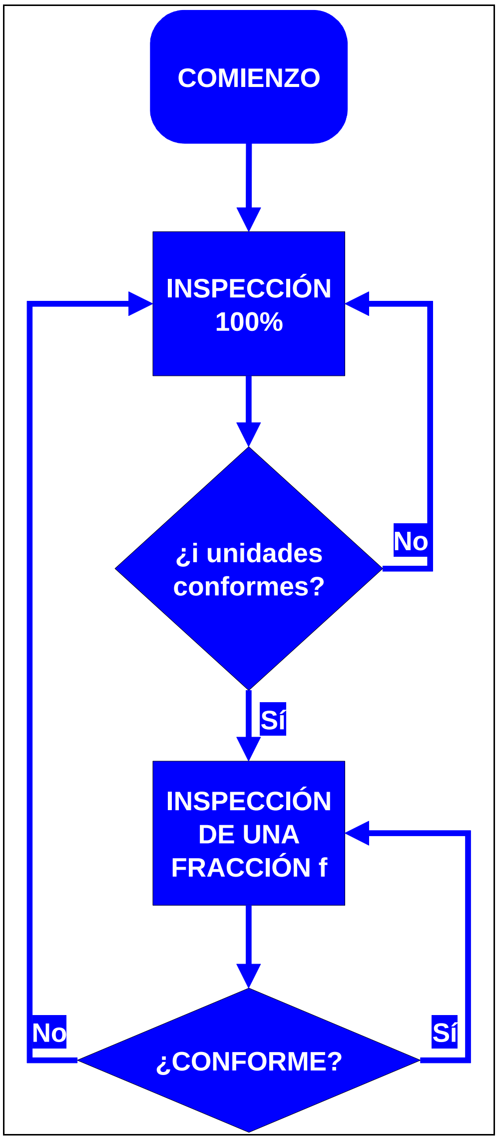

Fig. 11 Plan CSP-1

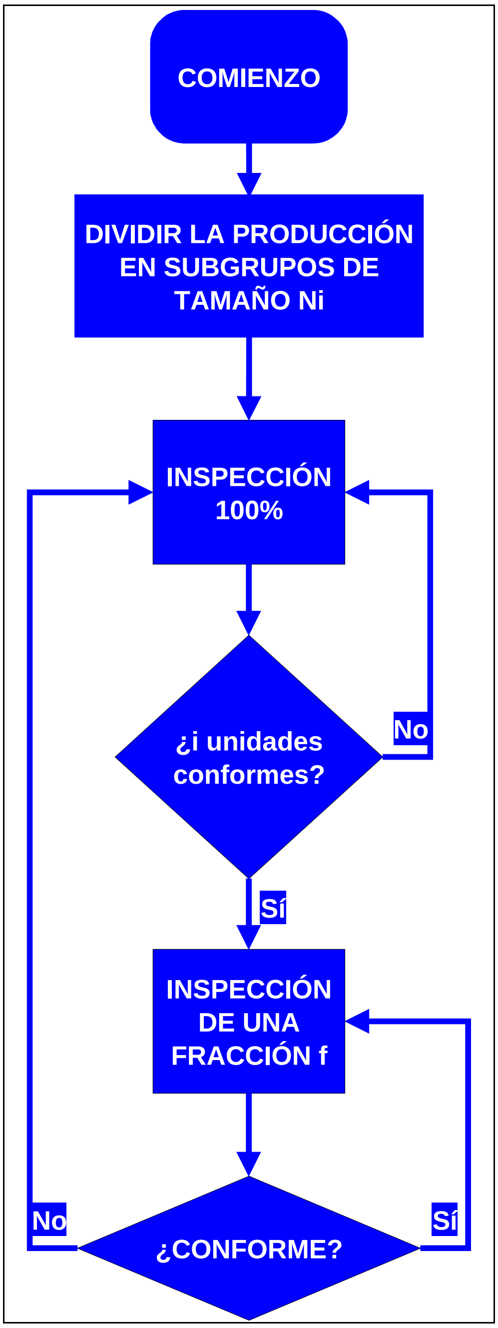

Fig. 12 Plan CSP-F

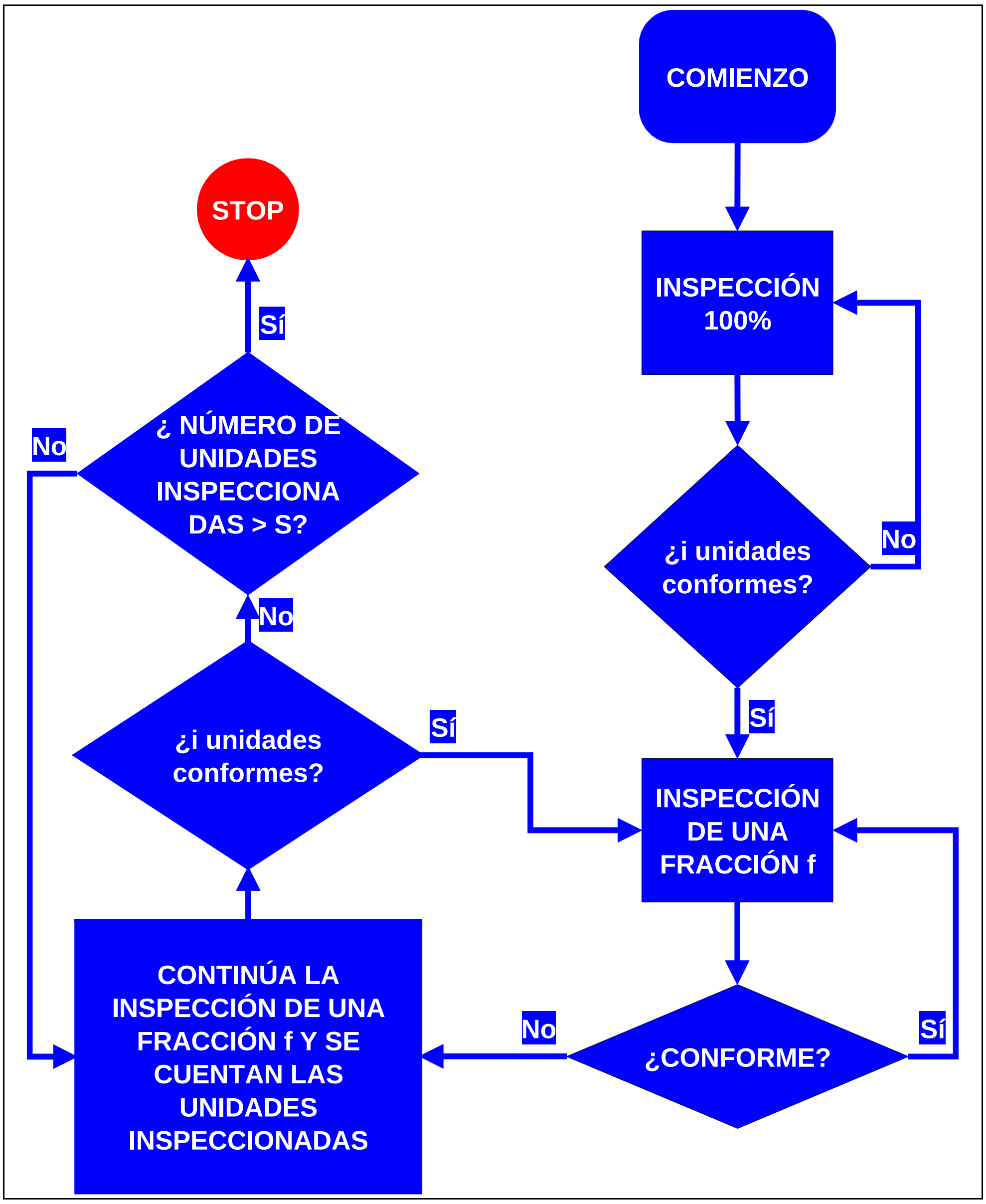

Fig. 13 Plan CSP-2

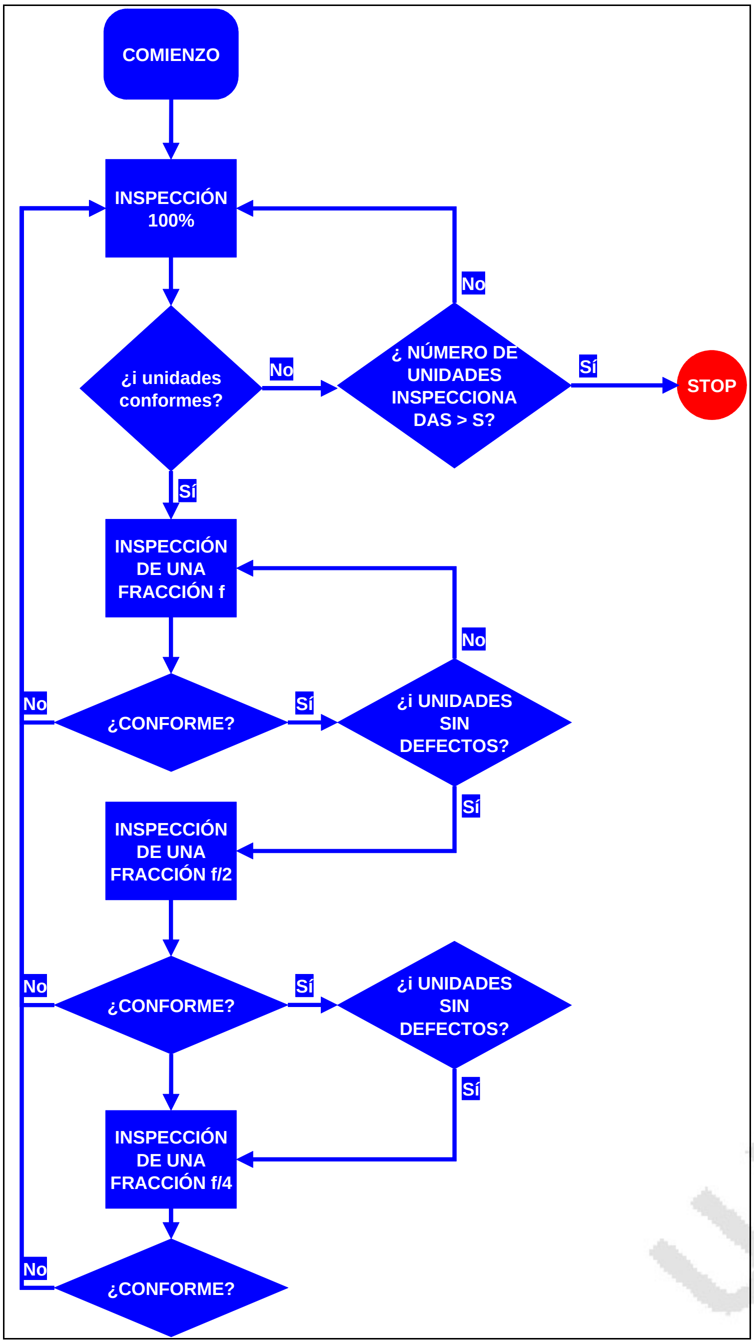

Fig. 14 Plan CSP-T

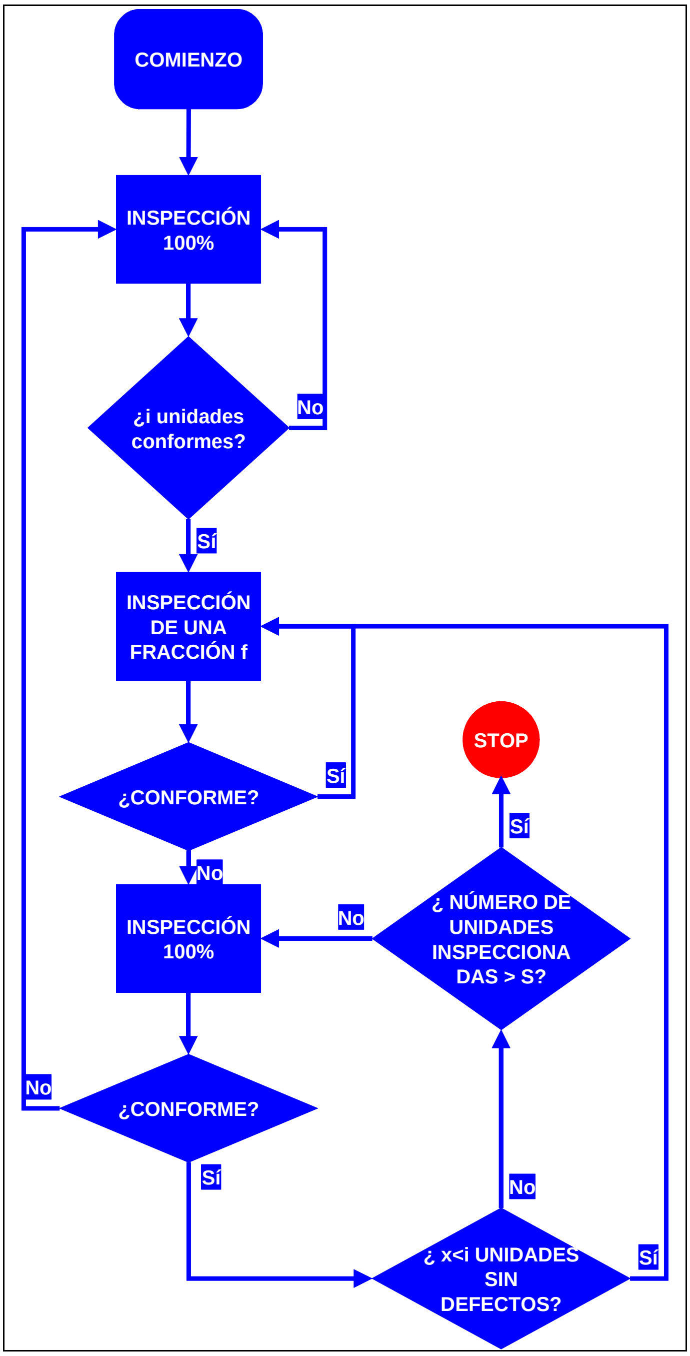

Fig. 15 Plan CSP-V

RESUMEN

a) El muestreo de aceptación sirve para reducir el esfuerzo de inspección y comporta unos riesgos.

b) La muestra debe ser representativa, lo que requiere que se extraiga aleatoriamente.

c) Aunque se basan en distribuciones de probabilidades, existen normas para facilitar su aplicación y reconocimiento.

ANEXO I. PRINCIPALES FUNCIONES DE DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD EMPLEADAS EN MUESTREOS DE ACEPTACIÓN

DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

Un proceso de Bernoulli se caracteriza por:

1. Los datos son de tipo cualitativo clasificados en dos categorías (por ejemplo blancos o negros, conformes o defectuosos, etc.).
2. Las observaciones son independientes.
3. La proporción de elementos de la población perteneciente a cada una de las dos clases (p y q=1-p) permanece constante independientemente de la cantidad observada. Esto equivale a decir que el número de elementos de la población es infinito o tan grande que a los efectos puede considerarse infinito. También satisfacen este requisito los muestreos con reemplazamiento, independientemente del tamaño de la población.

Si se establece una clasificación de objetos conformes y defectuosos, con proporciones p y q respectivamente, en elementos de una población y se establece la variable aleatoria "número de elementos defectuosos obtenidos al muestrear n elementos", se puede demostrar que la función de probabilidad (que se denomina "binomial") es:

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

La esperanza matemática y la varianza de la distribución binomial:

$$E[x] = np \qquad Var[x] = npq$$

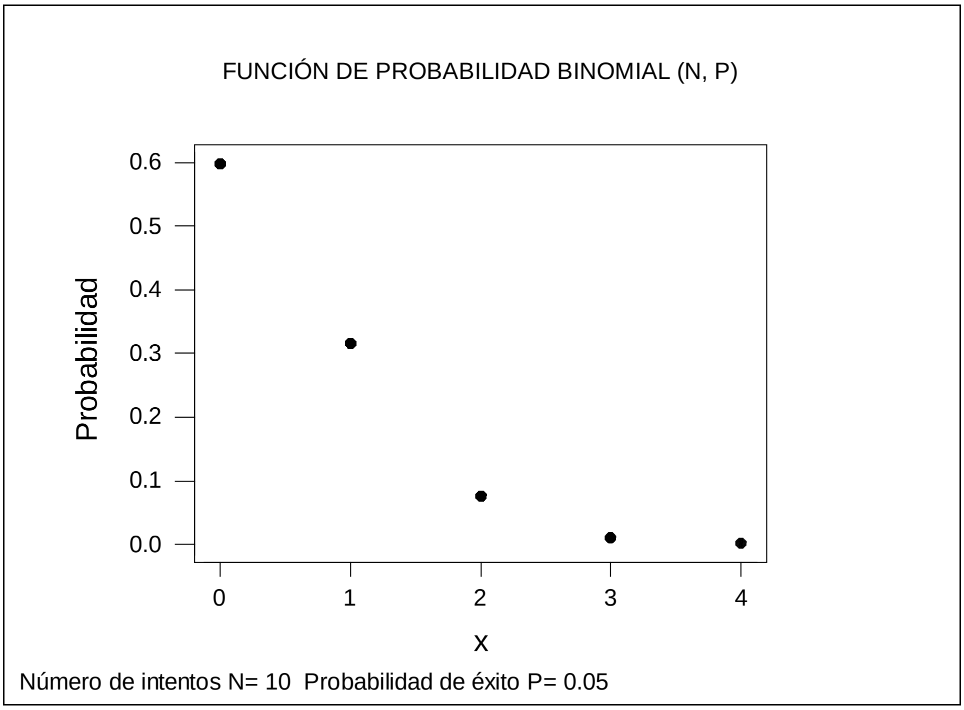

Fig. 16: Función de probabilidad binomial

DISTRIBUCIÓN HIPERGEOMÉTRICA

En el caso de poblaciones pequeñas en la que se realizan muestreos sin reposición no se cumplen los requisitos de un proceso de Bernouilli. Si el tamaño de la población es N, existen en ella D elementos no conformes, se extrae un muestra de n elementos y se quiere estudiar la variable aleatoria "obtener x elementos no conformes en la muestra", entonces la función de probabilidad es:

$$f(x) = \frac{\binom{D}{x}\binom{N-D}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

La esperanza matemática y la varianza de la distribución hipergeométrica:

$$E[x] = nD/N \qquad Var[x] = \frac{nD(N-D)(N-n)}{N^2(N-1)}$$

DISTRIBUCIÓN DE POISSON

Supongamos un proceso en el que se producen sucesos puntuales sobre un soporte continuo, por ejemplo entradas de llamadas en una central telefónica a lo largo del tiempo, defectos producidos en una línea de montaje, etc.

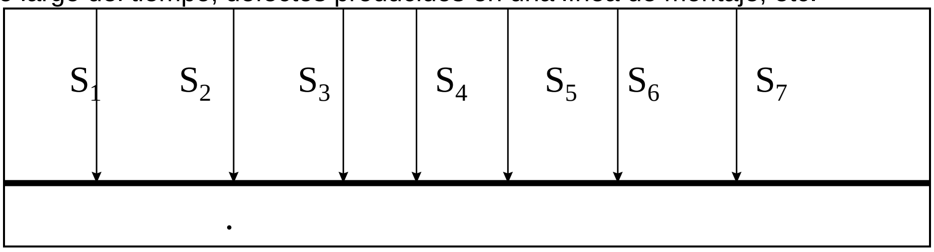

Fig. 17 Proceso de Poisson

Este proceso se llama proceso de Poisson si además verifica las condiciones siguientes:

1. El número medio de sucesos (es decir llamadas recibidas / minuto, defectos / producto, etc.) es estable a lo largo del tiempo. Lo representaremos por µ.
2. Los sucesos son independientes unos de otros. Es decir que el proceso “no tiene memoria”.

La función de probabilidad es:

$$f(x) = \frac{\mu^x}{x!}\exp(-\mu)$$

La esperanza matemática y la varianza de la distribución de Poisson es:

$$E[x] = Var[x] = \mu$$

Obsérvese que el proceso de Poisson puede ser asimilado a una variable aleatoria binomial en la que se estén sacando muestras continuamente y donde $\mu=np$. En efecto, puede comprobarse que si se calcula el límite de la función binomial cuando n tiende a infinito se obtiene precisamente la distribución de Poisson.

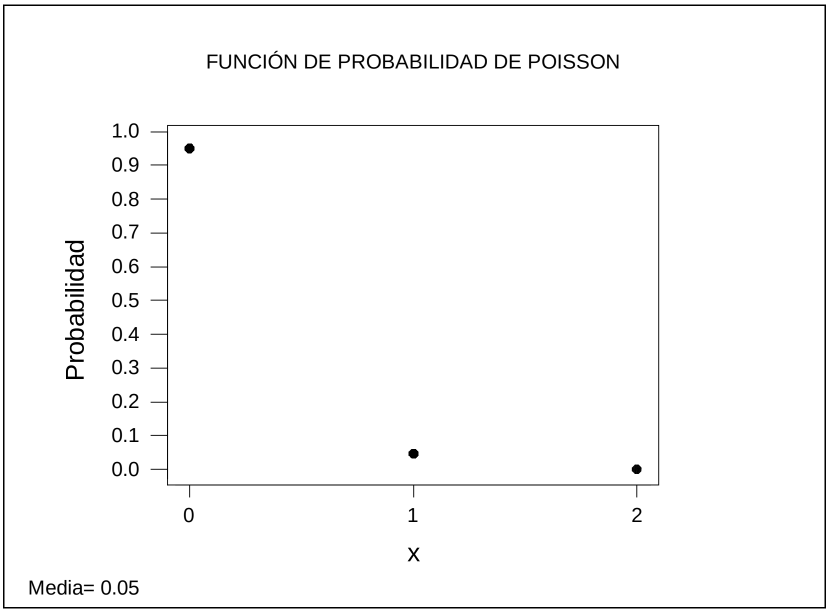

Fig. 18: Funcíon de probabilidad de Poisson

DISTRIBUCIÓN NORMAL O DE GAUSS

Sin ninguna duda es la distribución más importante en estadística. Su función de densidad es:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right) \qquad -\infty > x > \infty$$

y la función de distribución:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right) dx$$

Su $E[x]$ y $Var[x]$ son μ y σ^2 respectivamente. Es simétrica entorno a μ (es decir, el coeficiente de asimetría es CA=0).
Tiene las propiedades de que $\mu \pm 3\sigma$ contiene el 99.73% de la población, y que en el intervalo $\mu \pm 2\sigma$ está incluida el 95.46%. Es decir que menos de un 4 por mil de los casos de una población distribuida normalmente caerá fuera del intervalo $\mu \pm 3\sigma$.

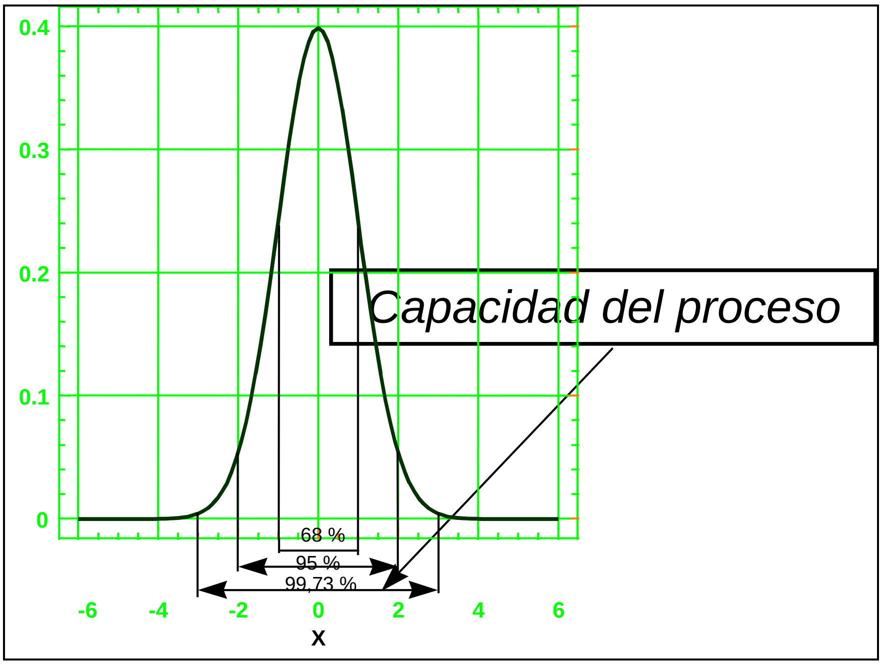

Fig. 19: Distribución normal

Para facilitar los cálculos, está tabulada la normal tipificada a $\mu = 0$ y $\sigma = 1$ o abreviadamente *N(0,1)*. El cambio de variable necesario para tipificar la normal es:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

DISTRIBUCIÓN CHI-CUADRADO.

Sean (x_1, x_2, x_3,.. ,x_n) n variables aleatorias normales N(0,1), es decir con $\mu = 0$ y $\sigma = 1$, e independientes entre sí. Construyamos la variable aleatoria:

$$\chi_n^{\ 2} = x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} + \ldots + x_n^{\ 2}$$

Esta variable aleatoria se distribuye de acuerdo con la siguiente función de densidad, que se denomina Chi-Cuadrado con n grados de libertad:

$$f(x) = K_n x^{(n-2)/2} \exp(-x/2)$$

La esperanza matemática y la varianza de la distribución Chi-Cuadrado son:

$$E\left[\chi_n^{\,2}\right] = n \qquad Var\left[\chi_n^{\,2}\right] = 2n$$

Es asimétrica tendiendo a la simetría según aumenta n (ver Fig. 20 y Fig. 21).
La interpretación de esta distribución es la siguiente. Si suponemos un vector en un espacio n-dimensional cuyas coordenadas sean precisamente (x_1, x_2, x_3,.. x_n), entonces $\chi_n^{\,2}$ es precisamente el cuadrado del módulo de ese vector, o lo que es equivalente, el cuadrado de la distancia entre el punto (x_1, x_2, x_3,.. x_n) y el origen. Esta interpretación permite entender mejor las aplicaciones de esta distribución cuando se emplea en los contrastes de ajuste.

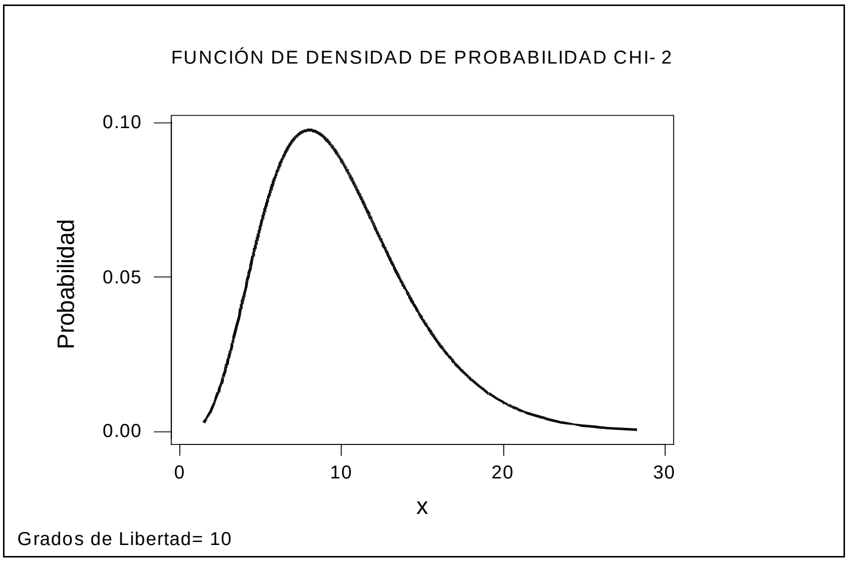

Fig. 20: Función de densidad de probabilidad de una Chi-2 con 10 g. de l.

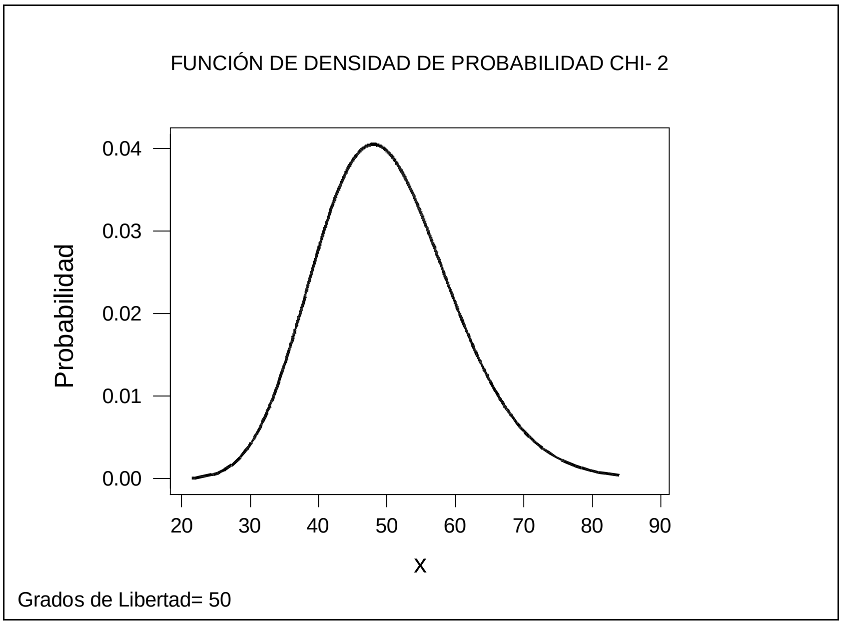

Fig. 21: Función de densidad de probabilidad de una Chi-2 con 50 g. de l.

DISTRIBUCIÓN T DE STUDENT

Sea *x* una variable aleatoria *N(0, 1)* y χ_n^2 Chi-cuadrado con n grados de libertad independiente de la anterior, se define la distribución t con n grados de libertad:

$$t_n = \frac{x}{\left[\frac{1}{n}\chi_n^2\right]^{1/2}}$$

La esperanza matemática y la varianza de la distribución t_n:

$$E[t_n] = 0 \qquad Var[t_n] = n/(n-2) \; para \; n > 2$$

Es simétrica tendiendo hacia la distribución normal según aumenta n.

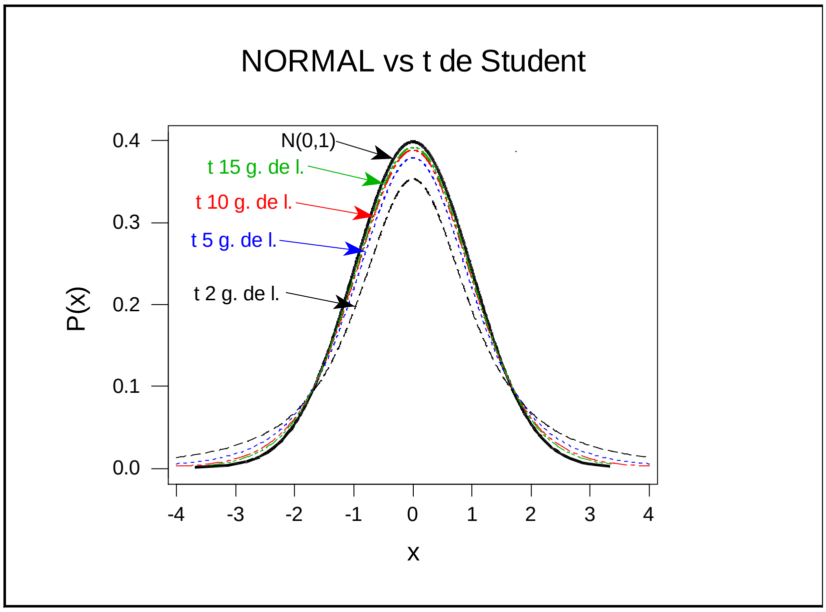

Fig. 22 Distribución t de Student(función de densidad)

ANEXO II. PRINCIPALES TABLAS DE LAS NORMAS

- MIL-STD-105E
- DODGE ROMIG
- MIL-STD-414
- MIL-STD-1235